سلسلة المنهـــــــــــل

الهندسة الفضائية (الفراغية)

الصف الحادي عشر العلمي

الفصل الدراسي الثاني 2019-2020

أ/ طلعت سلام ت 99845396

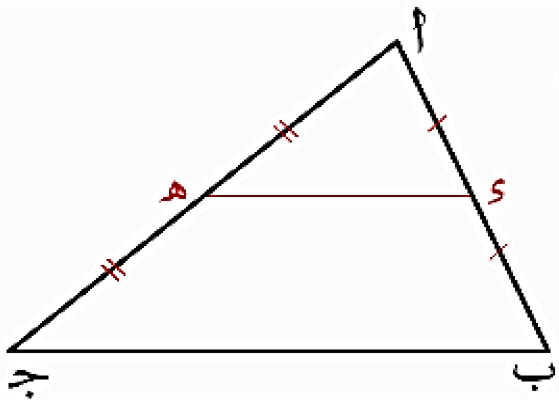
نســـــألكم الدعاء لوالدينا ولنا ولسائر المسلمين.

الوحدة الخامسة

الهندسة الفضائيَّة

أولاً: مراجعة بعض المفاهيم الاساسية في الهندسة المستوية

(١) المثلث:



* إذا كان ء منتصف $\overline{\text{أب}}$ ورسم $\overline{\text{ءهـ}}$ // $\overline{\text{بج}}$ فإن: هـ منتصف $\overline{\text{أج}}$.

* إذا كان ء منتصف $\overline{\text{أب}}$، هـ منتصف $\overline{\text{أج}}$ فإن:
$\overline{\text{ءهـ}}$ // $\overline{\text{بج}}$ ، ءهـ $= \frac{1}{2}$ بج.

* إذا كان $\overline{\text{ءهـ}}$ // $\overline{\text{بج}}$ فإن:

أ) $\frac{\text{أء}}{\text{ءب}} = \frac{\text{أهـ}}{\text{هـج}}$ ب) $\frac{\text{أء}}{\text{أب}} = \frac{\text{أهـ}}{\text{أج}} = \frac{\text{ءهـ}}{\text{بج}}$ ج) Δ أءهـ $\sim$ Δ أبج

ء) $\frac{\text{مساحة سطح } \Delta \text{ أءهـ}}{\text{مساحة سطح } \Delta \text{ أبج}} = \left(\frac{\text{أء}}{\text{أب}}\right)^2$

* إذا كان: $\frac{\text{أء}}{\text{ءب}} = \frac{\text{أهـ}}{\text{هـج}}$ أ، $\frac{\text{أء}}{\text{أب}} = \frac{\text{أهـ}}{\text{أج}}$ فإن: $\overline{\text{ءهـ}}$ // $\overline{\text{بج}}$

* مساحة سطح أي مثلث $= \frac{1}{2}$ طول القاعدة × طول الارتفاع النازل عليها.

$= \frac{1}{2}$ حاصل ضرب طولي ضلعين × جيب الزاوية المحصورة بينهما.

* مساحة المثلث المتساوي الأضلاع $= \frac{\sqrt{3}}{4} \times$ مربع طوله ضلعه.

* في المثلث المتساوي الساقين:

أ) منصف زاوية الرأس يكون عموديا على القاعدة وينصفها.

ب) العمود المرسوم من رأس المثلث على القاعدة يكون منصفا للقاعدة ولزاوية الرأس.

ج) المستقيم المار بمنتصف القاعدة وبرأس المثلث يكون عموديا على القاعدة ومنصفا لزاوية الرأس.

ء) في أي مثلث: المستقيم المار برأس المثلث قاطعا الضلع المقابل لهذا الرأس وتتحقق عليه خاصتين من الخواص الثلاث التالية، فإن المثلث يكون متساوي الساقين:

«ينصف زاوية الرأس – ينصف الضلع المقابل لهذا الرأس – عموديا على الضلع المقابل لهذا الرأس»

* في المثلث القائم الزاوية:

أ) مربع الوتر = مجموع مربعي ضلعي القائمة.

ب) مربع أحد ضلعي القائمة = مربع الوتر – مربع ضلع القائمة الآخر.

ج) طول المتوسط المرسوم من رأس القائمة إلي منتصف الوتر يساوي نصف طول الوتر.

ى) المثلث الثلاثيني الستيني: هو مثلث قائم الزاوية فيه قياس إحدى زاويتيه الحادتين ٣٠° أ، ٦٠°

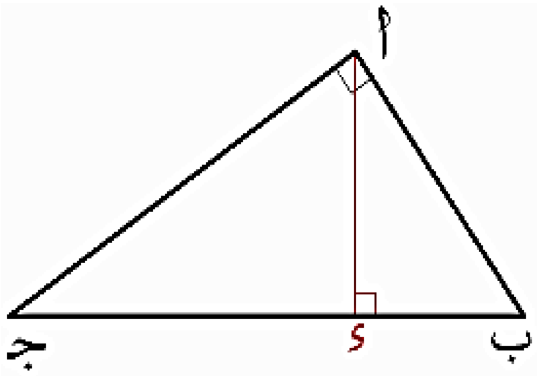
ومن خواصه: طول الوتر: الضلع المقابل لـ ٣٠° : الضلع المقابل لـ ٦٠° = ٢ : ١ : √٣

هـ) المثلث القائم المتساوي الساقين: هو مثلث قائم فيه قياس إحدى زاويتيه الحادتين ٤٥° ،

ومن خواصه: الوتر: ضلع القائمة = √٢ : ١

و) نظرية إقليدس:

Δ أ ب جـ قائم الزاوية في أ ، $\overline{\text{أى}}$ ⊥ $\overline{\text{ب جـ}}$ ، ينتج أن:



* (أب)^٢ = ب ى · ب جـ * (أ جـ)^٢ = جـ ى · ب جـ

* (أى)^٢ = ب ى · ى جـ

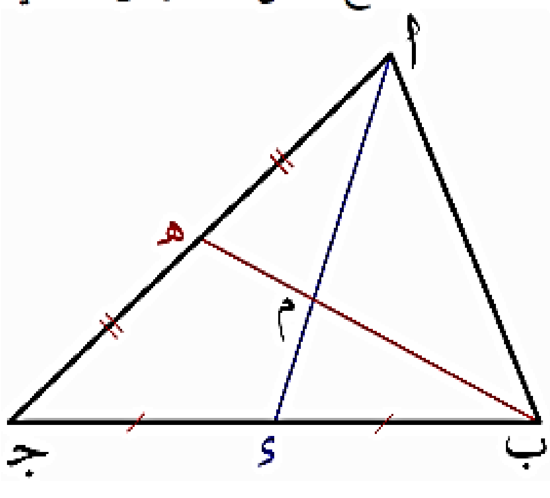
* أى = $\frac{\text{أب · أجـ}}{\text{ب جـ}}$

* في الشكل السابق: Δ أ ب ى ~ Δ جـ أ ى ~ Δ جـ ب أ

* في أي مثلث:

* إذا كان: مربع الضلع الأكبر = مجموع مربعي الضلعين الآخرين ، فإن المثلث يكون قائم الزاوية.

* إذا كان طول المتوسط المرسوم من أحد رؤوس المثلث إلي منتصف الضلع المقابل لهذا الرأس يساوي نصف طول ذلك الضلع، كانت زاوية الرأس قائمة.



* متوسطات المثلث:

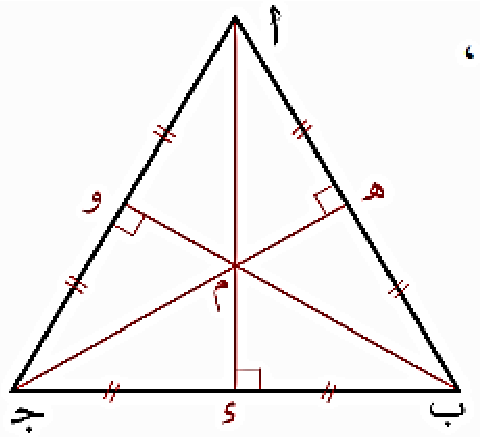
* تتقاطع جميعا في نقطة واحدة تقسم كل منها بنسبة ٢ : ١ من جهة الرأس أ، ١ : ٢ من جهة القاعدة.

* في المثلث المتساوي الأضلاع الذي طول ضلعه (ل):

م نقطة تلاقي متوسطات Δ أ ب جـ ، ى ، هـ متصفا $\overline{\text{ب جـ}}$ ، $\overline{\text{أ ب}}$ على الترتيب:

أ ى = جـ هـ = $\frac{\text{ل} \sqrt{3}}{2}$ ، م ى = م هـ = $\frac{1}{3}$ أ ى = $\frac{\text{ل} \sqrt{3}}{6}$ ،

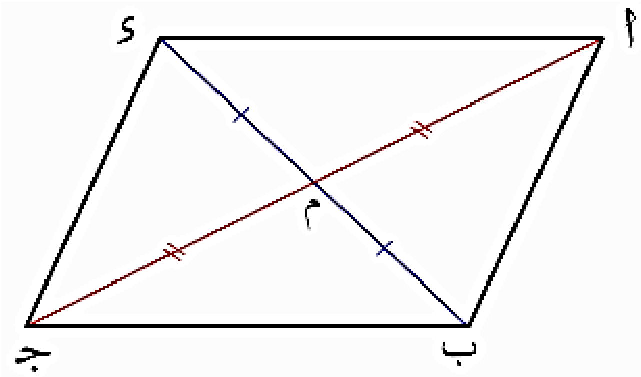
أ م = جـ م = $\frac{2}{3}$ أ ى = $\frac{\text{ل} \sqrt{3}}{3}$



(٢) متوازي الأضلاع:

* تعريف متوازي الأضلاع:

هو شكل رباعي فيه كل ضلعين متقابلين متوازيان.



* خواص متوازي الأضلاع: فيه:

- كل ضلعين متقابلين متساويان في الطول.
- كل زاويتين متقابلتين متساويتان في القياس.
- كل زاويتين متتاليتين متكاملتان.
- القطران ينصف كل منهما الآخر.

* يكون الشكل الرباعي متوازي الأضلاع .. إذا تحقق فيه إحدى الحالات الآتية:

- ضلعان متقابلان متوازيان ومتساويان في الطول.
- واحدة من الخواص الأربع السابقة، بالإضافة إلى تعريف متوازي الأضلاع.

** حالات خاصة من متوازي الأضلاع:

- المستطيل: هو متوازي أضلاع إحدى زواياه قائمة .
- خواص المستطيل: بالإضافة إلي خواص متوازي الأضلاع فإن قطريه متساويان في الطول.
- المعين: هو متوازي أضلاع فيه ضلعين متجاورين متساويين في الطول.
- خواص المعين: بالإضافة إلي خواص متوازي الأضلاع فإن:

– القطران متعامدان. – القطر ينصف زاوية الرأس.

- المربع: هو مستطيل فيه ضلعين متجاورين متساويين في الطول، أو هو معين إحدى زواياه قائمة.
- خواص المربع: له خواص كل من المستطيل والمعين. طول قطر المربع = طول ضلعه × $\sqrt{2}$

ثانياً : الهندسة الفضائية

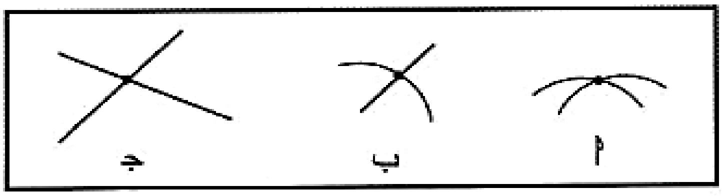
مفاهيم أساسية في الهندسة الفضائية

المستقمات والمستويات

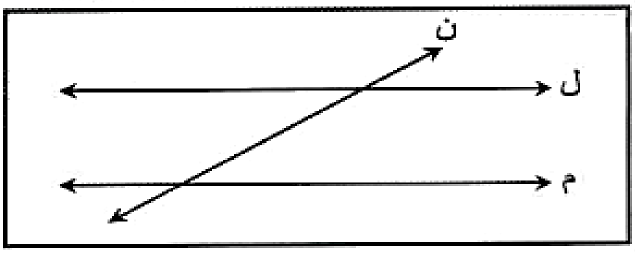
بعض المفاهيم والمسلمات الأساسية في الهندسة الفضائية :

(١) تعـــاريف ومسلمـــات:

(أ) تعريف النقطة: هي محل تقاطع خطين مثل النقط أ ، ب ، جـ في الشكل المجاور.

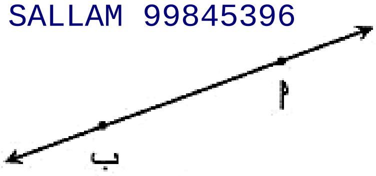


(ب) تعريف الخط المستقيم: هو نوع خاص من الخطوط كل منها عبارة عن مجموعة غير منتهية من النقط ويمثل بيانياً معادلة من الدرجة الأولى مثل المستقيمات ل ، م ، ن في الشكل المجاور.



مسلمـــة: (أ)

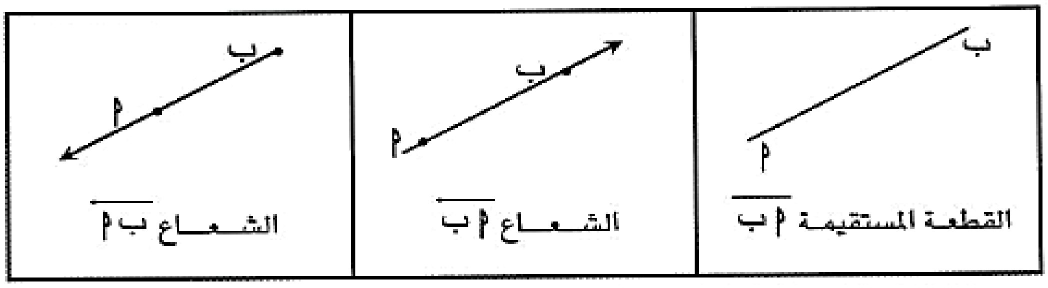
أي نقطتين مختلفتين أ ، ب يمر بهما مستقيم واحد وواحد فقط.



- يرمز للمستقيم المار بالنقطتين أ ، ب بالرمز $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ أي أن:

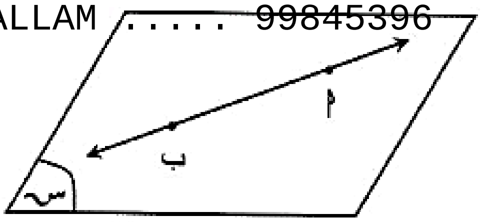
<u>المستقيم يتعين بنقطتين مختلفتين.</u>

- ومن المجموعات الجزئية للمستقيم $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$.



(جـ) تعريف المستـــوى:

- هو سطح يتكون من مجموعة غير منتهية من النقط إذا مر أي مستقيم بنقطتين مختلفتين منها فإن هذا المستقيمة يكون محتوى في ذلك السطح.
- يرمز للمستوى بأحد الحروف الكبيرة س ، ص ، ع ، ....



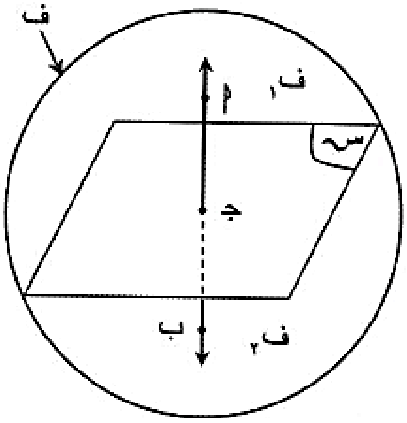
❖ رغم أن أي مستوى يكون ممتدًا في جميع الاتجاهات إلى ما لا نهاية إلا أنه عند رسم المستوى قد أصطلح على تمثيله بقطعة منه تشبه صورة الورقة أو السبورة أو لوحة الرسم الهندسي كما في الشكل.

فإذا كان س مستوى، أ ∈ س ، ب ∈ س

فإن $\overleftrightarrow{أب}$ ⊂ س أي أن $\overleftrightarrow{أب}$ محتوى في س

أو واقع في س بأكمله.

(د) تعريف الفـــراغ:



هو مجموعة غير منتهية من النقط شاملة لجميع النقط والمستقيمات والمستويات والمجسمات الموجودة في هذا الكون.

❖ وإذا كان المستوى س أحد المجموعات الجزئية للفراغ (ف) فإن:

(أ) مجموعة جميع نقط الفراغ الواقعة على أحد جانبي المستوى س ولا تتضمن أي نقطة من س تسمى نصف الفراغ (ف١).

(ب) جميع نقط الفراغ الواقعة في الجانب الآخر من المستوى س تسمى نصف الفراغ (ف٢).

(جـ) يسمى المستوى س (حدًا أو وجهًا) لكل من نصف الفراغ ف١ أو ف٢ رغم أنه غير محتوى في أي منهما.

ويلاحظ أن: $\boxed{ف_1 \cap ف_2 = \varnothing}$ ، $\boxed{ف_1 \cup س \cup ف_2 = ف}$.

(د) إذا كانت أ ∈ نصف الفراغ ف١ ، ب ∈ نصف الفراغ ف٢ فإن المستقيم $\overleftrightarrow{أب}$ لابد أن يقطع المستوى س في نقطة ولتكن جـ ∴ $\overleftrightarrow{أب} \cap س = \{جـ\}$ أي أنه إذا قطع مستقيم مستوياً فإنه يقطعه في نقطة واحدة.

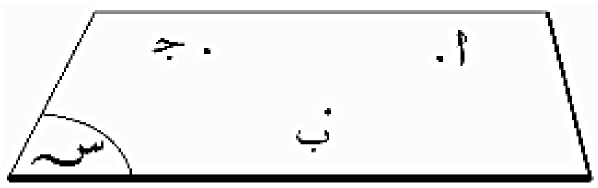
تعريف الهندسة الفضائية (الفراغية)

هي العلم الذى يدرس خواص المستقيمات والمستويات والمجسمات في الفراغ والعلاقة بينها جميعاً

تعيين المستوى في الفراغ :

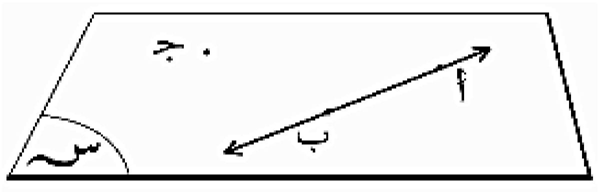
يتعين المستوى بأي من الحالات الآتية :

(١)



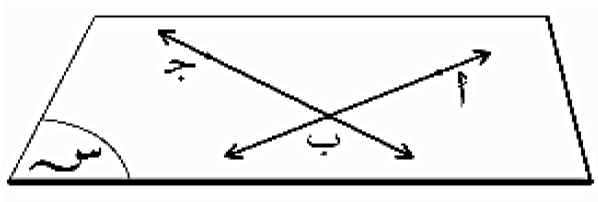
«ثلاث نقط ليست على استقامة واحدة»

(٢)



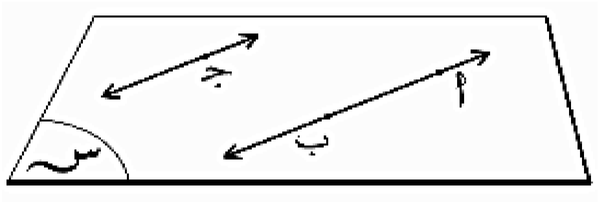
«مستقيم ونقطة خارجه»

(٣)



«مستقيمين متقاطعين»

(٤)



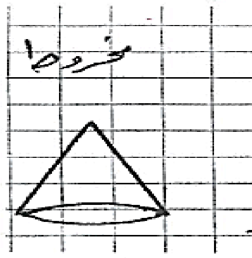
«مستقيمين متوازيين»

ملاحظات :

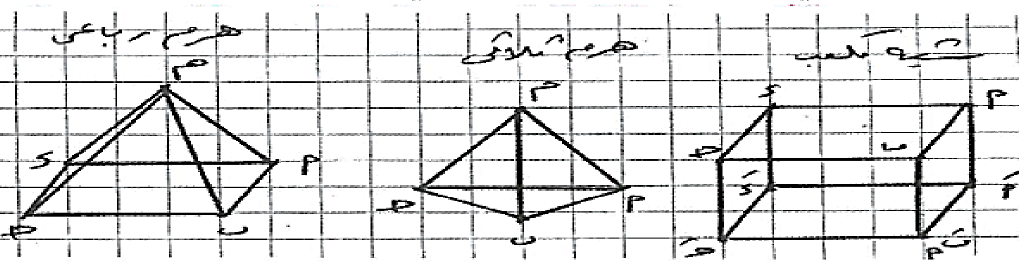
- أي نقطة في المستوى يمر بها عدد لا نهائي من المســـــتقيمات .
- أي نقطة في الفراغ يمر بها عدد لا نهائي من المستويات .
- أي مستقيم في الفراغ يمر به عدد لا نهائي من المستويات .
- كل ثلاث نقاط ليست على استقامة واحدة يمر بها مستوٍ واحد فقط .
- إذا اشترك مستويان في ثلاث نقاط ليست على استقامة واحدة فانهما ينطبقان .

MR:TALAAT SALLAM 99845396

مثـــال ١ : عين النقط (الروؤس) والمستقيمات والمستويات للأشكال التالية



شكل (٤)



شكل (٣)   شكل (٢)   شكل (١)

الحـــل :

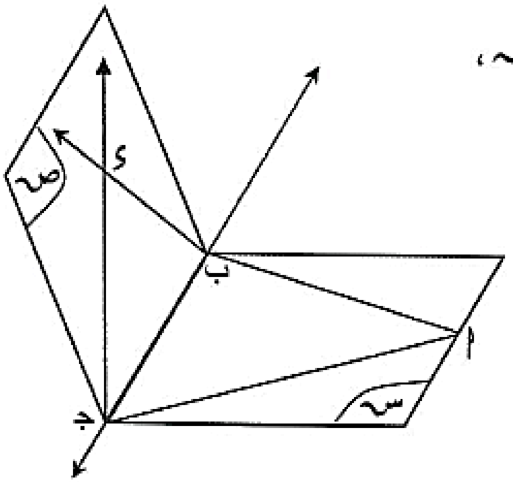
	شكل (١)	شكل (٢)	شكل (٣)	شكل (٤)
عدد الرؤوس	٨	٤	٥	١
عدد المستقيمات	١٢	٦	٨	صفر
عدد المستويات	٦	٤	٥	١ (دائرة)

مثـــال٢ : في الشكل المجاور أ ، ب ، جـ هي رؤوس مثلث ، مستقيمان متقاطعان

∴ أ ، ب ، جـ تعين مستو واحد.

وليكن س ، $\overline{\text{ب ء}}$ ، $\overline{\text{جـ ء}}$ تعين مستو واحد وليكن ص ،

أكمل الجمل الآتية بأحد الرموز $\in$ ، $\notin$ ، $\subset$ ، $\not\subset$.



أ) ء .... ص ، ء .... س

ب) $\overline{\text{ب ء}}$ .... ص ، $\overline{\text{ب ء}}$ .... س

ج) $\overline{\text{ب جـ}}$ .... ص ، $\overline{\text{ب جـ}}$ .... س

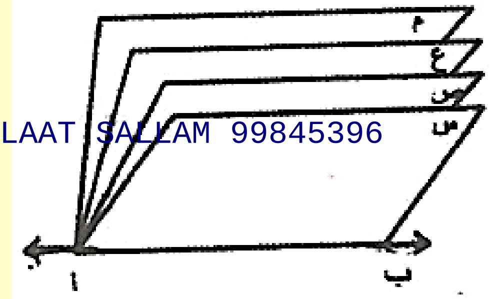
د) ب .... $\overline{\text{ب جـ}}$ ، ب .... س ، ب .... ص

الحـــــل :

أ) $\in$ ، $\notin$ ب) $\subset$ ، $\not\subset$

ج) $\subset$ ، $\subset$ د) $\in$ ، $\in$ ، $\in$

مثـــال٣ :



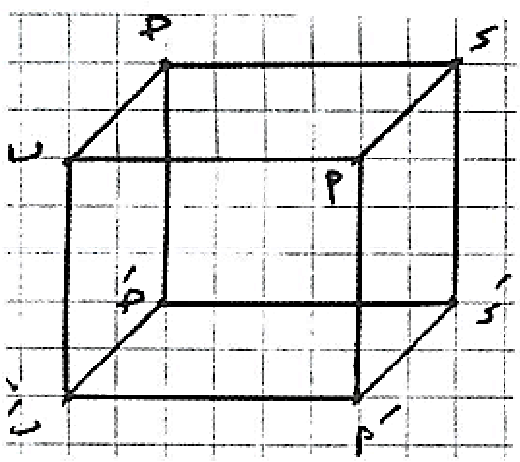
اعتبر كعب كراستك: $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ يمر به المستويات:

س ، ص ، ع

هل يمكن أن يمر به مستويات أخرى ؟ (نعم)

تدريب :

1) من الشكل المقابل أكمل :

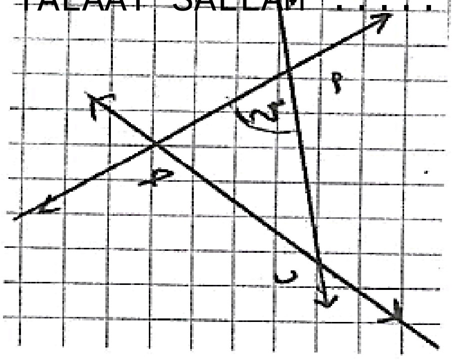


١ $\overline{\text{أ د}}$: خط تقاطع المستويان : ......

٢ $\overline{\text{أ/ ب/}}$: خط تقاطع المستويان ....

٣ $\overline{\text{جـ جـ/}}$: خط تقاطع المستويان ..... ، .....

٤ $\overline{\text{جـ ب}}$: خط تقاطع المستوان ..... ، ....



نتيجة :

إذا تقاطعت ثلاث مستقيمات مثنى مثنى فإنها تحدد مستوى .

البرهان :

∵ $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{ب جـ}}$ متقاطعان في ب

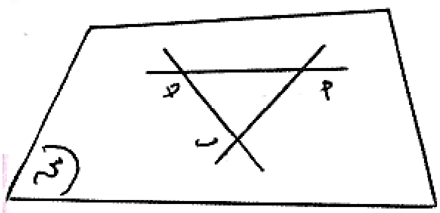
∴ يكونا مستوى وليكن س .

∵ أ ، جـ ∈ س .

∴ المستقيم $\overleftrightarrow{\text{أ جـ}}$ يقع في س

∴ المستقيمات $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{ب جـ}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{أ جـ}}$ في مستوى واحد .

مثـــال ٤ : أثبــت أن كــل مــستوى يحــوي ثلاثــة مستقيمات على الأقل.



البرهـــان : نفرض أن ا ، ب ، جـ نقط ليست على استقامة واحدة.

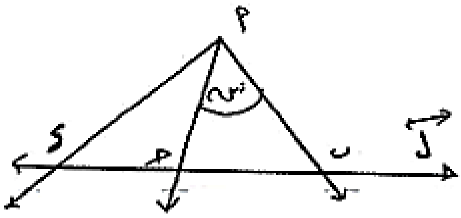
← يوجــد مــستــوى واحــد فـقـط يحــويهما وليكن س .

لكن لأي نقطتين مختلفتين في الفضاء يمر بهما مستقيم واحد .

← هنالك ثلاثة مستقيمات مختلفة على الأقل هي:

$\overleftrightarrow{\text{اب}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{بجـ}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{اجـ}}$ تقع في المستوى.

مثـــال ٥ : $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{أ جـ}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{أ د}}$ ثلاث مستقيمات متقاطعة في نقطة أ ، قطعها جميعاً المستقيم $\overleftrightarrow{\text{ل}}$ في ب ، جـ ، د أثبت أن ، المستقيمات الأربعة في مستوى واحد .



البرهـــان

∵ $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{أ جـ}}$ متقاطعان في أ

∴ يعينان مستوى وليكن س

∵ ب ، جـ ∈ س   ∴ $\overleftrightarrow{\text{ب جـ}}$ ⊂ س

، ∵ د ∈ $\overleftrightarrow{\text{ب جـ}}$ ∴ د ∈ س   ∵ أ ∈ س

∴ $\overleftrightarrow{\text{أ د}}$ يقع في س   ∴ $\overleftrightarrow{\text{أ د}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{ل}}$ يقعان في س

∴ المستقيمات : $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{أ جـ}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{أ د}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{ل}}$ تقع في س (مستوى واحد)

مثـ٥ـال : ما هو عدد المستقيمات التي يمكن ان تمر بـ

① نقطة واحد ② نقطتين ③ ٣ نقاط

الحـــل :

(١) عدد لا نهائي (٢) مستقيم وحيد

(٣) ٣ نقاط : إذا كانت على استقامة واحدة ∴ مستقيم واحد

، إذا كانت ليست على استقامة واحدة ← ثلاث مستقيمات

مثـ٦ـال : ما هو عدد المستويات التي يمكن ان تمر بكل ممايأتي:

① نقطة واحدة ② نقطتين ③ ٣ نقاط

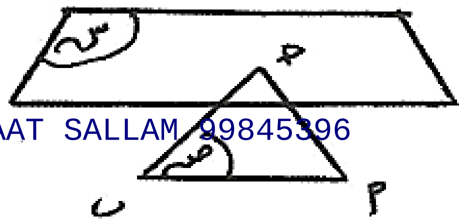
الحـــل :

(١) عدد لا نهائي (٢) عدد لانهائي (كعب الكراسة)

(٣) إذا كانت ليست على استقامة واحدة ← مستوى وحيد .

إذا كانت على استقامة واحدة ← لا نهائي

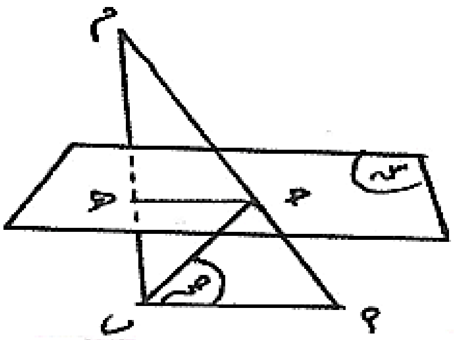
نظـــرية :



إذا اشترك مستويان في نقطة فلابد أن يشتركا في مستقيم.

المعطيات : س ، ص يشتركان في جـ

المطلـوب : إثبات أن س ، ص يشتركان في مستقيم يمر بـــ جـ



العمــــل نرسم $\overleftarrow{\text{أ جـ}}$ الذي يمر بالنقطة م

ونرسم $\overline{\text{م ب}}$ الذي يقطع س في هـ

البرهـــان :

∵ $\overleftarrow{\text{أ جـ}}$ ⊂ ص

∴ م ∈ ص ∴ ب ، م ∈ ص

∴ $\overline{\text{ب م}}$ جزء من ص ∴ هـ ∈ ص لأن هـ ∈ $\overline{\text{ب م}}$

∴ هـ ، جـ ∈ ص ، هـ ، جـ ∈ س

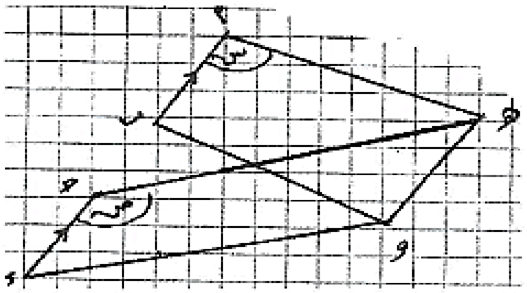
∴ هـ ، جـ ∈ س ⋂ ص ∴ س ⋂ ص = $\overline{\text{هـ جـ}}$ (مستقيم)

MR : TALAAT SALLAM 99845396

ملاحـــــظة :

(حقيقة هندسية)

إذا توازى مستقيمان ، مر بهما مستويان فإن خط تقاطع المستويان يوازي كلا من المستقيمان .



∵ $\overline{أ ب}$ // $\overline{جـ د}$

، مر بهم المستويان س ، ص

، س ∩ ص = $\overline{هـ و}$

∴ $\overline{هـ و}$ // كلا من $\overline{أ ب}$ ، $\overline{جـ د}$

الاوضاع النسبية لمستقيمين في الفراغ :

توجد ثلاث حالات مختلفة للأوضاع النسبية لمستقيمين ل ، م فى الفراغ هى :

متوازيان

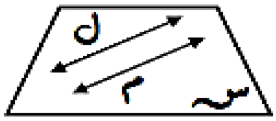
(٢) المستقيمان ل ، م يتوازيان

إذا كان : ل // م

فإن : ل ∩ م = ∅

و فى هذه الحالة يقع

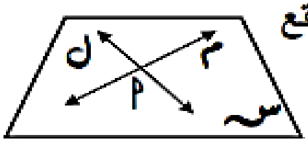
المستقيمان فى مستو واحد



متخالفان

(١) المستقيمان ل ، م يتقاطعان فى نقطة واحدة أ ل ∩ م = { أ }

و فى هذه الحالة يقع المستقيمان فى مستو واحد

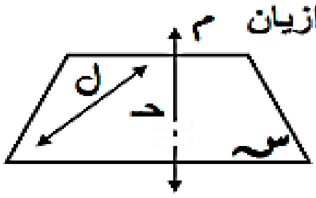


متخالفان

(٣) المستقيمان ل ، م لا يتقاطعان و لا يتوازيان

و من ثم لا يقعان فى مستو واحد

و يقال أنهما متخالفان أو غير مستويين



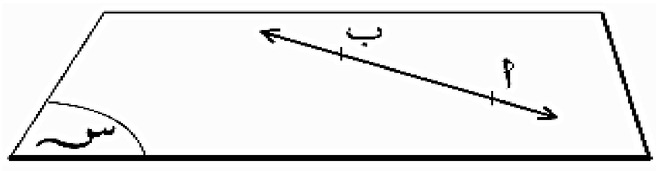
شرط توازى مستقيمين :

ل // م إذا كان : ل ∩ م = ∅ ؛ ل ، م يقعان فى مستوى واحد

* ملاحظات :

* الإنطباق حالة خاصة من التوازى
* المستقيمان الموازيان لثالث فى الفراغ متوازيان
* أى مستقيمين فى الفراغ إما أن يكونا :
  * مستويين معاً (يقعان فى مستو واحد) فيكونا متوازيين أو متقاطعين
  * غير مستويين معاً (لا يقعان فى مستو واحد) فيكونا متخالفين

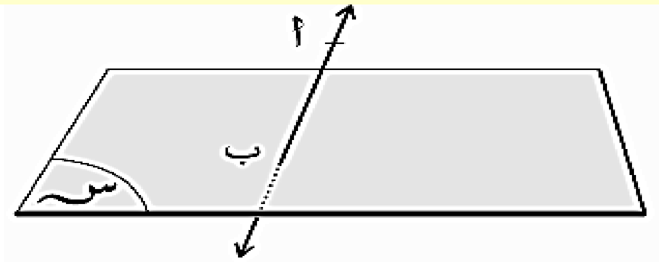
الاوضاع النسبية لمستقيم ومستو:



«المستقيم يقع بأكمله داخل المستوى»

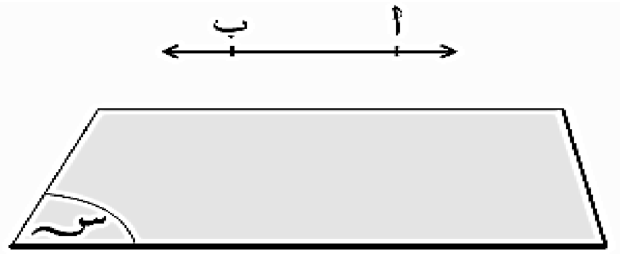
$\widetilde{\text{س}} \cap \overleftrightarrow{\text{أ ب}} = \overleftrightarrow{\text{أ ب}}$

$\overleftrightarrow{\text{أ ب}} \subset \widetilde{\text{س}}$



«المستقيم يقطع المستوى في نقطة»

$\widetilde{\text{س}} \cap \overleftrightarrow{\text{أ ب}} = \{\text{ب}\}$



«المستقيم يوازي المستوى»

$\widetilde{\text{س}} \cap \overleftrightarrow{\text{أ ب}} = \varnothing$ أي $\overleftrightarrow{\text{أ ب}} \parallel \widetilde{\text{س}}$

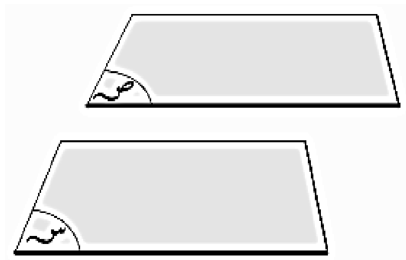
س: متى يكون المستقيمان المتخالفان متعامدين.

الجواب:

إذا كانت الزاوية بينهما قائمة.

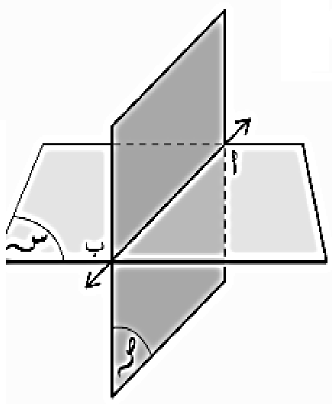
الاوضاع النسبية لمستويين في الفراغ :

يوجد لمستويين مختلفين ثلاثة أوضاع في الفراغ، هي:



«المستويان متوازيان»

$\widetilde{\text{س}} \cap \widetilde{\text{ص}} = \varnothing$ أي $\widetilde{\text{س}} \parallel \widetilde{\text{ص}}$

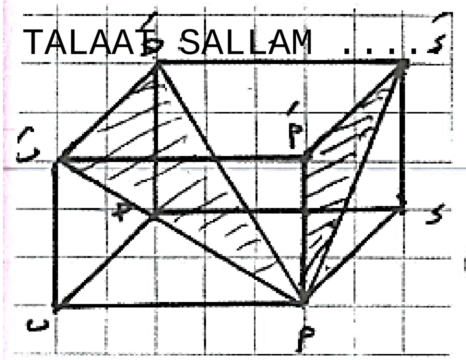


«المستويان متقاطعان»

$\widetilde{\text{س}} \cap \widetilde{\text{ص}} = \overleftrightarrow{\text{أ ب}}$

«المستويان متطابقان»

$\widetilde{\text{س}} = \widetilde{\text{ص}}$ كما يمكننا القول أن $\widetilde{\text{س}} \parallel \widetilde{\text{ص}}$



مثـــال٧ : أ ب جـ د أَ بَ جَ دَ متوازي مستطيلات **فأوجد :**
المستوى أ أَ دَ ∩ جَ أ بَ

البرهـــان ∵ المستويان يتقاطعان في نقطة أ

∴ لابد أن يتقاطعان في مستقيم يمر بـــ أ

المستوى أ أَ دَ ∩ المستوى جَ أ بَ = $\overline{\text{أ د}}$

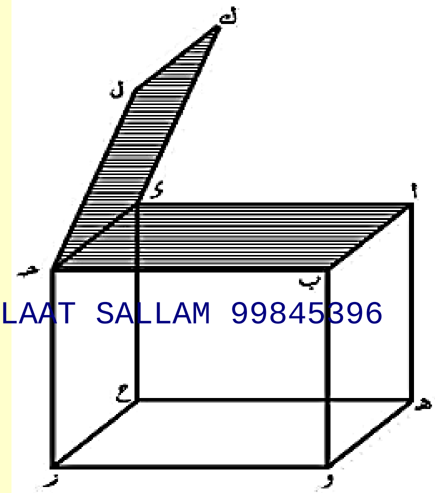
لأن المستويان يمران بالمستقيمان $\overline{\text{أَ دَ}}$ ، $\overline{\text{بَ جَ}}$

الموازيان للمستقيم $\overline{\text{أ د}}$

مثـــال٨ : الشكل المرسوم يمثل صندوقاً مرفوع الغطاء ، أعط مثالاً على كل من الحالات الآتية:

(١) ثلاثة أزواج من المستقيمات المتوازية.

الحـــل :



($\overleftrightarrow{\text{أى}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{بـجـ}}$) ، ($\overleftrightarrow{\text{هـو}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{زع}}$) ، ($\overleftrightarrow{\text{ىع}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{جـز}}$)

(٢) ثلاثة أزواج من المستقيمات المتقاطعة.

الحل:

($\overleftrightarrow{\text{أب}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{بـجـ}}$) ، ($\overleftrightarrow{\text{لـجـ}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{جـى}}$) ، ($\overleftrightarrow{\text{ىع}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{عز}}$)

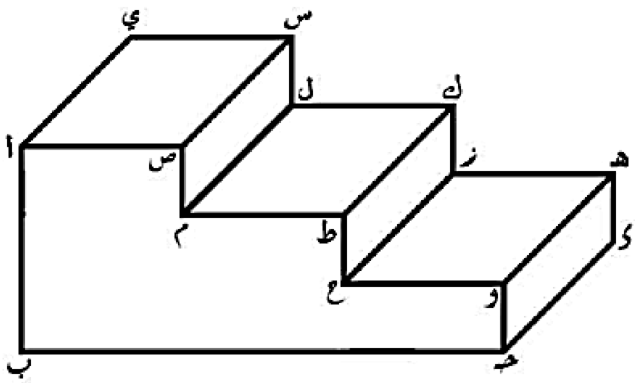
(٣) ثلاثة أزواج من المستقيمات المتخالفة.

الحل:

($\overleftrightarrow{\text{بـجـ}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{ىع}}$) ، ($\overleftrightarrow{\text{ىك}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{وز}}$) ، ($\overleftrightarrow{\text{ىو}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{هـع}}$)

تدريب :

يمثل الشكل المرسوم درجاً لأحد المنازل . أعط مثالاً على كلٍ مما يأتي:



(١) مستويان متوازيان .

(٢) مستوى يوازي المستوى س ل م .

(٣) مستقيم يوازي المستوى هـ و ع .

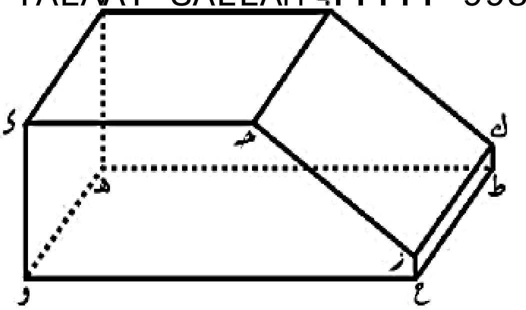
(٤) مستقيم يقطع المستوى ا ب جـ .

تدريب : في الشكل المقابل أذكر ما ياتي :

(أ) مستقيمان متقاطعان .   (ب) مستقيمان متوازيان .

(حـ) مستقيمان متعامدان .   (ى) مستقيمان متخالفان .

(هـ) مستقيمان متخالفان ومتعامدان .

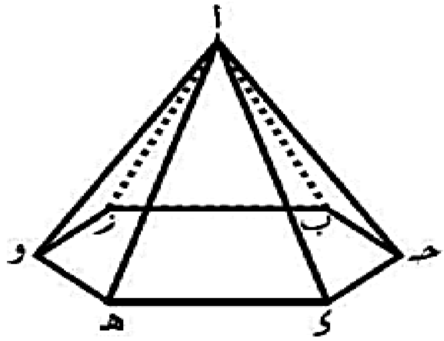


مثـــــال : يمثل الشكل هرماً سداسياً قائماً .

أعط مثالاً على كل مما يأتي:

(أ) مستقيمين متوازيين .

الحل: $\overleftrightarrow{\text{حـ ى}} \parallel \overleftrightarrow{\text{ز و}}$



(ب) مستقيمين متقاطعين .

الحل: $\overleftrightarrow{\text{حـ ى}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{ى هـ}}$

(حـ) مستقيمين متخالفين .

الحل: $\overleftrightarrow{\text{أ حـ}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{و هـ}}$

(ى) مستويين متقاطعين .

الحل: أ حـ ى ، ب حـ ى هـ

(هـ) مستقيم يقطع مستوى .

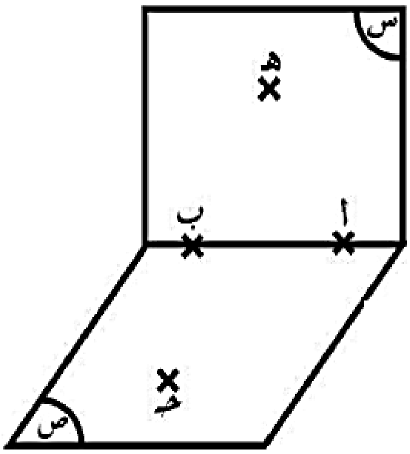
الحل: $\overleftrightarrow{\text{أ ى}}$ يقطع المستوى ى هـ و

مثـــال١١ : إذا كانت النقط أ ، ب ، هـ تقع في المستوى

س ، والنقط أ ، ب ، حـ تقع في المستوى ص .

أثبت أن المستويين س ، ص يتقاطعان في

المستقيم $\overleftrightarrow{\text{أب}}$.



البرهان:

∵ أ ∈ س ، أ ∈ ص

∴ أ ∈ س ∩ ص

وكذلك

∵ ب ∈ س ، ب ∈ ص

∴ ب ∈ س ∩ ص

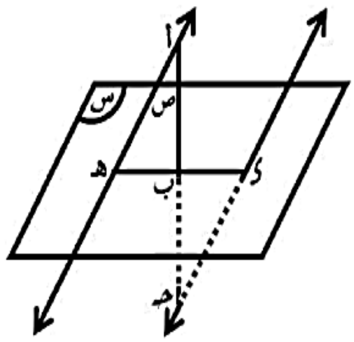
أي أن المستقيم الذي يحوي النقطتين أ ، ب يقع بأكمله في كل من المستويين س ، ص

إذن المستويان س ، ص يتقاطعان في المستقيم $\overleftrightarrow{\text{أب}}$

وهو المطلوب

مثـــال ١٢ : إذا قطعت القطعة المستقيمة $\overleftrightarrow{أجـ}$ المستوى س في النقطة ب ورسم من أ، جـ مستقيمان متوازيان قطعا المستوى س في النقطتين هـ، ى على الترتيب .

أثبت أن هـ، ب، ى تقع على استقامة واحدة.



الحـــل : المستوى أ هـ جـ ى هو مستوى وحيد يحوي المستقيمين المتوازيين $\overleftrightarrow{أهـ}$ ، $\overleftrightarrow{جـى}$

ولنسم هذا المستوى ص .

∵ أ ∈ ص ، جـ ∈ ص

∴ $\overleftrightarrow{أجـ}$ يقع في المستوى ص

لكن ب ∈ $\overleftrightarrow{أجـ}$ بالفرض

∴ هـ، ب، ى ∈ ص

ولكن هـ، ب، ى ∈ س فرضاً.

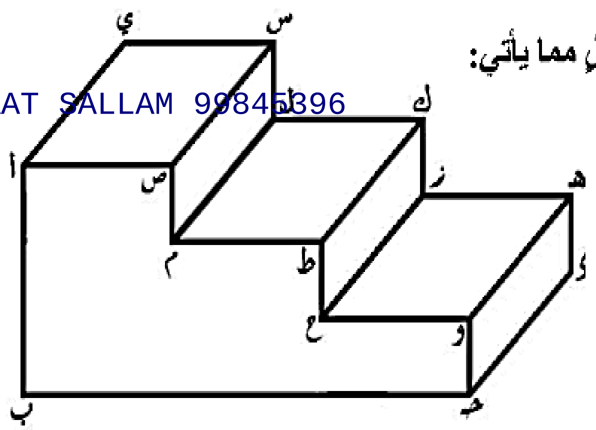
∴ هـ، ب، ى ∈ س ∩ ص

لكن س ∩ ص مستقيم

∴ هـ، ب، ى تقع على استقامة واحدة.

تدريب :

يمثل الشكل المرسوم درجاً لأحد المنازل . أعط مثالاً على كلٍ مما يأتي:



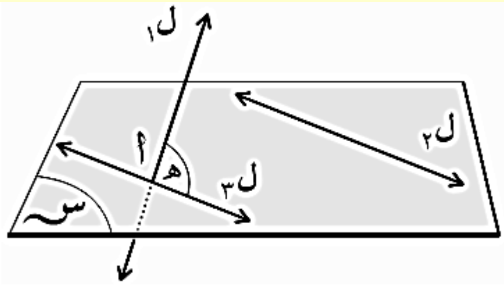
(١) مستويان متوازيان .

(٢) مستوى يوازي المستوى س ل م .

(٣) مستقيم يوازي المستوى هـ و ع .

(٤) مستقيم يقطع المستوى أ ب جـ .

الزاوية بين مستقيمين متخالفين:



هي الزاوية بين أحدهما والقاطع له موازيًا الآخر.

$ل_١$، $ل_٢$ متخالفان (غير مستويين)، $ل_٢ // ل_٣$ (مستويان)،

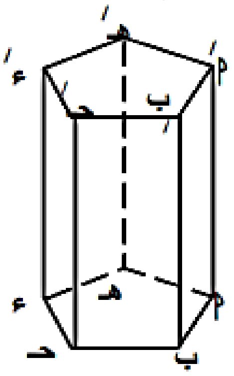
$ل_١ \cap ل_٣ = \{أ\}$، لذلك فإن الزاوية هـ بين $ل_١$، $ل_٣$

هي الزاوية بين $ل_١$، $ل_٢$.

وإذا كان $ل_١ \perp ل_٣$، فإن $ل_١ \perp ل_٢$، ويقال عندئذٍ أن $ل_١$، $ل_٢$ متخالفان على التعامد.

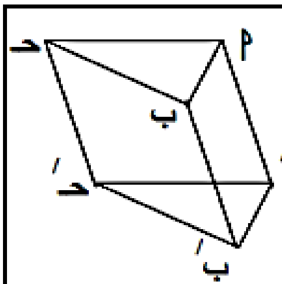
بعض المجسمات الشهيرة :

* المنشور : هو الجسم المتولد من إنتقال سطح مضلع موازيـاً لنفسه فى إتجاه ثابت و يسمى سطح المضلع فى كل من و ضعـه الأول و الأخير قاعدة المنشور

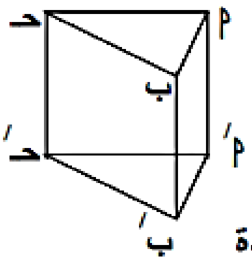


* ملاحظات :
* إذا كان إتجاه الإنتقال مائلاً على القاعدة فإن المنشور يكون مائل
* إذا كان إتجاه الإنتقال عمودياً على القاعدة فإن المنشور يكون قائم
* يسمى المنشور ثلاثياً أو رباعياً أو ... حسب عدد أضلاع قاعدته
* المساحة الجانبية للمنشور = محيط القاعدة × الإرتفاع
* المساحة الكلية للمنشور = المساحة الجانبية + ٢ × مساحة القاعدة
* حجم المنشور = مساحة القاعدة × الإرتفاع

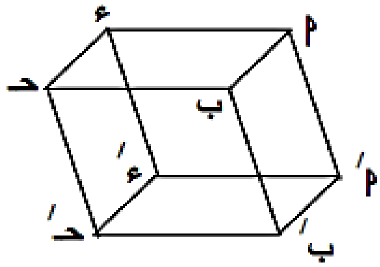
* المنشور المائل :
* الأحرف الجانبية متساوية فى الطول و متوازية
* الأحرف الجانبية مائلة على القاعدة
* الأوجه الجانبية متوازيات أضلاع
* إرتفاع المنشور المائل هو البعد العمودى بين القاعدتين



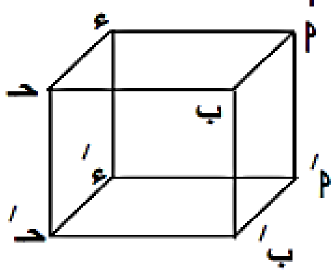
* المنشور المائل :
* الأحرف الجانبية متساوية فى الطول و متوازية
* الأحرف الجانبية عمودية على القاعدة
* الأوجه الجانبية مستطيلات
* إرتفاع المنشور المائل = الحرف الجانبى

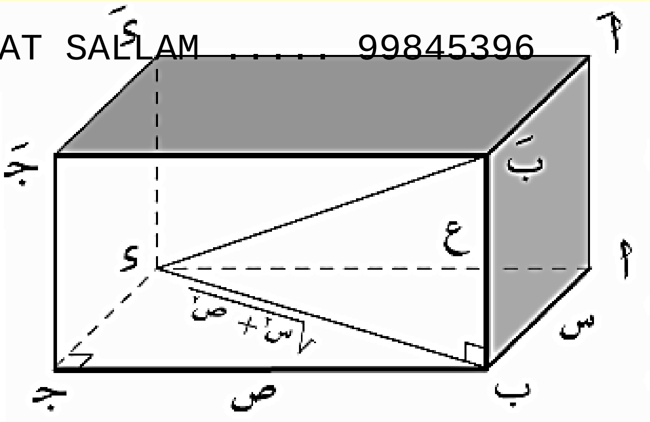


حالات خاصة من المنشور :
* متوازى السطوح :
هو منشور كل من قاعدتيه سطح متوازى أضلاع
* قطره : هو القطعة المستقيمة الواصلة بين رأسين ليسا فى وجه واحد ، عدد أقطاره أربعة
* و هو نوعان :
* أولاً : متوازى السطوح المائل
* أحرفه الجانبية مائلة على مستوى قاعدتيه
* أوجهه الجانبية متوازيات أضلاع
* إرتفاعه هو البعد العمودى بين القاعدتين
* أقطاره الأربعة غير متساوية فى الطول و تتقاطع فى نقطة واحدة منتصف كل منها



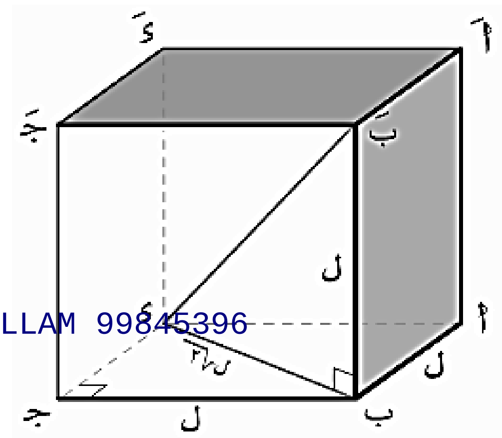
، و من الشكل أقطاره هى : ب ءَ ، بَ ء ؛ ا حـَ ، اَ حـ
* ثانياً : متوازى السطوح القائم
* أحرفه الجانبية عمودية على مستوى قاعدتيه
* أوجهه الجانبية مستطيلات
* إرتفاعه = الحرف الجانبى
* أقطاره الأربعة غير متساوية فى الطول و تتقاطع فى نقطة واحدة و هى : مثل المائل





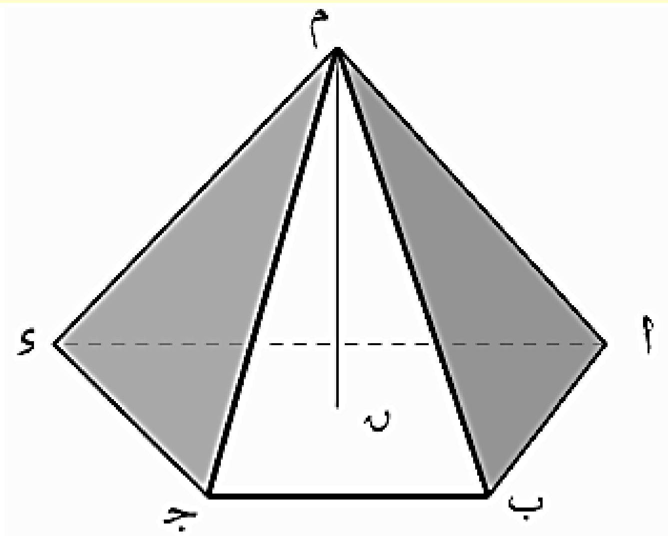
❋ متوازي المستطيلات:

- هو منشور قائم كل من قاعدتيه سطح مستطيل.
- أبعاد متوازي المستطيلات س، ص، ع هي أطوال ثلاثة أحرف متلاقية في رأس واحدة.
- مساحته الجانبية = محيط القاعدة × الارتفاع = ٢ع(س + ص)
- مساحته الكلية = ٢(س ص + ص ع + ع س)
- حجمه = س ص ع
- طول قطره = $\sqrt{س^{٢}+ص^{٢}+ع^{٢}}$



❋ المكعب:

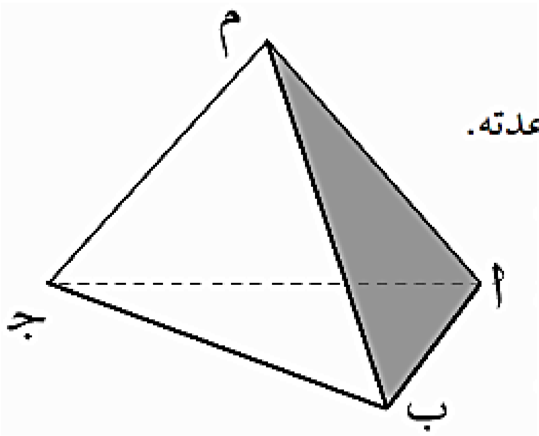
- هو متوازي مستطيلات تساوت أبعاده الثلاثة، طول كل منها ل – مثلاً.
- كل وجه من أوجهه الستة مربع.
- مساحته الجانبية = ٤ $ل^{٢}$
- مساحته الكلية = ٦ $ل^{٢}$
- حجمه = $ل^{٣}$
- طول قطره = $ل\sqrt{٣}$



❋ الهرم:

- هو اتحاد القطع المستقيمة المرسومة من نقطة خارج مستوى معلوم إلى جميع نقط منطقة مضلعة في المستوى المعلوم.
- يُسمى الهرم حسب عدد أضلاع قاعدته ... ثلاثي .. رباعي ... إلخ.

- تُسمى النقطة م رأس الهرم، ويُقرأ الهرم ويُكتب ... رأسه.
- تُسمى القطع المستقيمة $\overline{\text{م أ}}$ ، $\overline{\text{م ب}}$ ، $\overline{\text{م جـ}}$ ، ... الأحرف الجانبية للهرم.

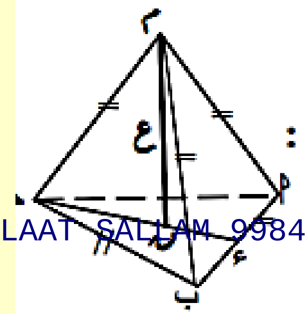


- كل وجه من أوجه الهرم الجانبية عبارة عن مثلث.
- ارتفاع الهرم هو طول العمود النازل من رأسه إلى قاعدته.
- الهرم الثلاثي المنتظم: هو هرم ثلاثي أطوال أحرفه الستة متساوية، ويكون كل وجه من أوجهه الأربعة مثلث متساوي الأضلاع، وارتفاعه يلاقي قاعدته

* الهرم الثلاثى المنتظم : هو هرم قائم أوجهه الأربعة سطوح مثلثات متساوية الأضلاع

* خواصه :

* يمكن إعتبار أى وجه من أوجهه قاعدة
* الإرتفاعات الجانبية متساوية فى الطول
* فى الشكل المقابل إذا كان : طول حرفه = ل ، إرتفاعه ع فإن :
* إرتفاعاته الجانبية " و هى إرتفاعات الأوجه الجانبية



* حـ ء $= \frac{\sqrt{3}}{2}$ ل

* ء ب $= \frac{\sqrt{3}}{6}$ ل

* حـ ب $= \frac{\sqrt{3}}{3}$ ل

* إرتفاعه (ع) " م ب " $= \frac{\sqrt{6}}{3}$ ل ((٣ ع^2 = ٢ ل^2))

تمارين ومسائل 1

(١) إذا كانت النقاط أ ، ب ، جـ ليست على استقامة واحدة . فما عدد المستقيمات التي تمر بها معاً ، ما عدد المستويات التي تمر بها ؟

(٢) إذا كان أ ، ب ، جـ ثلاث نقط على استقامة واحدة . فما عدد المستقيمات التي تمر بها ، ما عدد المستويات التي تمر بالنقاط الثلاثة .

(٣) انقل الى دفترك ، أملأ الفراغ فيما يلي :

أ) ....تحدد خط مستقيم   ب) ثلاث نقاط .... تحدد مستوى .

ج) مستقيمان .... يحددان مستوى   د) مستويان .... يحددان مستقيم

(٤) اذكر نص التعريف أو المسلمة أو النظرية التي تعالج كلا من النقاط التالية علماً بأن أ ، ب ، جـ ليست على استقامة واحدة .

أ) أ ب جـ مستوى وحيد   ب) $\overline{\text{أ ب}}$ مستقيم وحيد

ج) $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{أ جـ}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{ب جـ}}$ تقع في المستوى أ ب جـ

د) المستوى م ب جـ ، المستوى أ د م يتقاطعان في مستقيم .

(٥) كم مستقيماً نستطيع رسمه في كل حالة مما يلي :

أ) ثلاث نقاط ليست على استقامة واحدة

ب) تقاطع مستويين

ج) ٤ نقاط مستوية منها ٣ على استقامة واحدة .

د) ٤ نقاط مستوية لا تقع أي ثلاثة منها على استقامة واحدة .

(٦) كم مستوى تستطيع تحديده في كل حالة مما يلي :

أ) ٤ نقاط غير مستوية لا تجمع أي ثلاثة منها خط مستقيم .

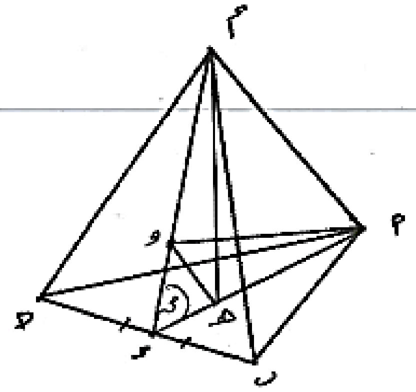
ب) ٥ نقاط غير مستوية منها ٣ على استقامة واحدة .

٧ أجب عما يلي :

أ) كم مستقيماً يمكن رسمه ويمر بنقطة معلومة ؟

ب) كم مستوى يمكن أن يمر بمستقيمين متوازيين .

ج) إذا تقاطعت ٣ مستويات فما أقل عدد ، ما أكبر عدد من المستقيمات يمكن الحصول عليها .



٨ م أ ب جـ هرم ثلاثي قاعدته المثلث أ ب جـ

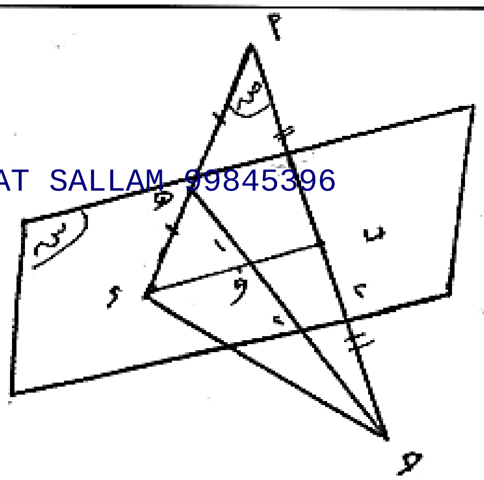
فإذا كانت هـ هي ملتقى المتوسطات في القاعدة

أ ب جـ، و ملتقى المتوسطات في الوجه م ب جـ

اثبت أن :

$\overline{\text{أ و}}$ ، $\overline{\text{م هـ}}$ يجمعهم مستوى واحد .

٩ أثبت أن أضلاع المستطيل تقع جميعاً في مستوى واحد .



١٠ $\overline{\text{أ جـ}}$ تقطع المستوى س في ب بحيث

أ ب = ب جـ ، رسم $\overleftarrow{\text{أ د}}$ يقطع المستوى

س في د ثم نصفت $\overline{\text{أ د}}$ في هـ ، رسم $\overline{\text{هـ جـ}}$

فقطع المستوى س في و وأثبت أن :

أ) النقط ب ، و ، د على استقامة واحدة .

ب) ب و = $\frac{1}{2}$ و د ، هـ و = $\frac{1}{2}$ و جـ

١١ إذا كان ل$_1$ ، ل$_2$ مستقيمين مختلفين متقاطعان في أ ، ل$_1$ $\subseteq$ المستوى س ،

ل$_2$ $\subseteq$ المستوى ص ، توجد نقطة ب $\in$ ل$_1$ ، نقطة جـ $\in$ ل$_2$.

ارسم ثم أكمل :

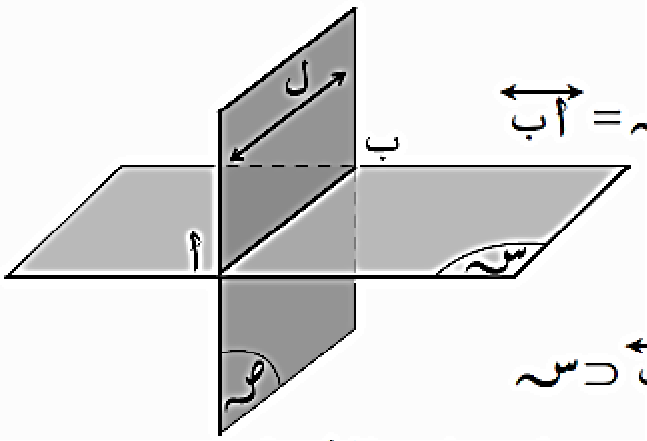
أ) المستوى ب أ جـ $\cap$ ص = ...   ب) المستوى ب أ جـ $\cap$ س = ...

ج) س $\cap$ ص $\cap$ المستوى ب أ جـ = ...

توازى مستقيم ومستوى

نظـــرية :

«إذا وازى مستقيم مستويًا فإنه يوازي جميع المستقيمات التي تنشأ عن تقاطع هذا المستوى مع المستويات التي تحتوي ذلك المستقيم».



المعطيات: ل // س، ل ⊂ ص، س ∩ ص = $\overleftrightarrow{\text{أب}}$

المطلوب: أثبت أن: ل // $\overleftrightarrow{\text{أب}}$

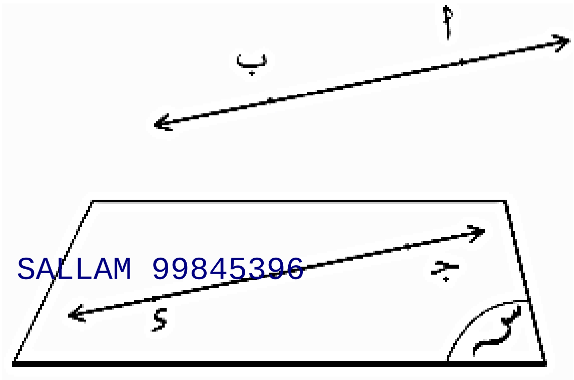
البرهـان: ∵ ل // س ∴ ل ∩ س = ∅

∴ ل ∩ $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ = ∅ لأن $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ ⊂ س

∵ ل، $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ ⊂ ص (يجمعهما مستوى واحد وغير متقاطعين)

∴ ل // $\overleftrightarrow{\text{أب}}$

*** حقيقة هندسية:**



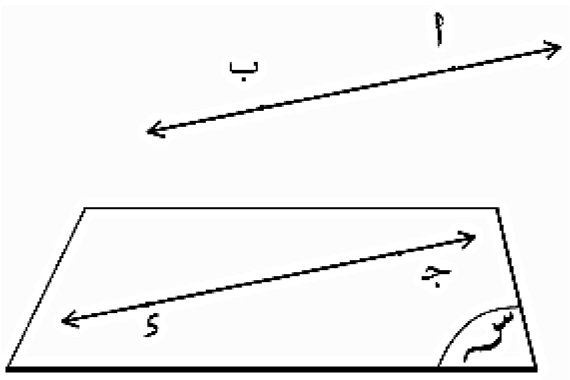
«إذا وازى مستقيم خارج مستوى مستقيمًا في المستوى فإنه يوازي ذلك المستوى».

$\overleftrightarrow{\text{أب}}$ ⊄ س، $\overleftrightarrow{\text{جـء}}$ ⊂ س، $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ // $\overleftrightarrow{\text{جـء}}$

∴ $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ // س

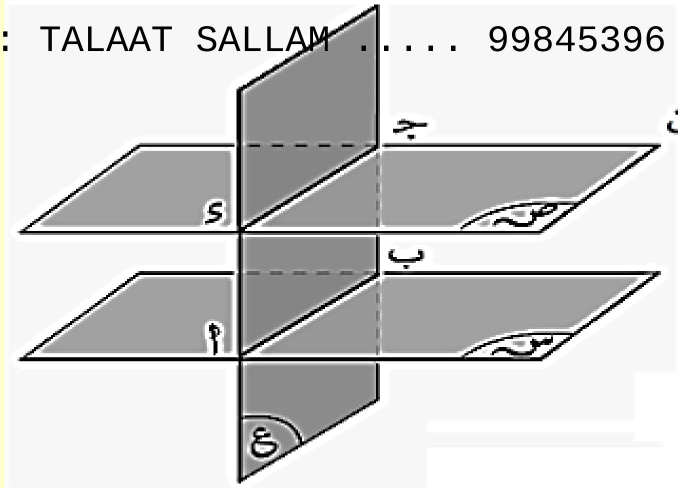
**** نتائج هامة:**

نتيجة (١): ❋ ❋



«إذا وازى مستقيم مستويًا، فالمستقيم الـذي يمـر بـأي نقطـة مـن نقـط المـستوى موازيًـا المستقيم المعلوم يقع بأكمله في المستوى».

$\overleftrightarrow{\text{أب}}$ // س، جـ ∈ س، $\overleftrightarrow{\text{جـء}}$ // $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ ∴ $\overleftrightarrow{\text{جـء}}$ ⊂ س



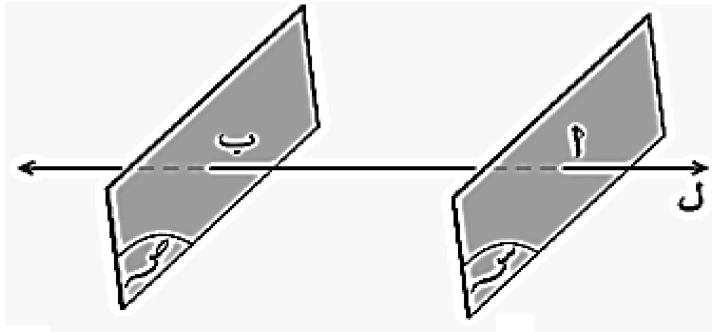
نتيجة (٢):

«إذا قطع مستوى كل من مستويين متوازيين فخطًّا تقاطعه معهما يكونان متوازيين».

ع ∩ س~ = $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ ، ع ∩ ص~ = $\overleftrightarrow{\text{جـ ء}}$ ،

س~ // ص~ ∴ $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ // $\overleftrightarrow{\text{جـ ء}}$

نتيجة (٣):



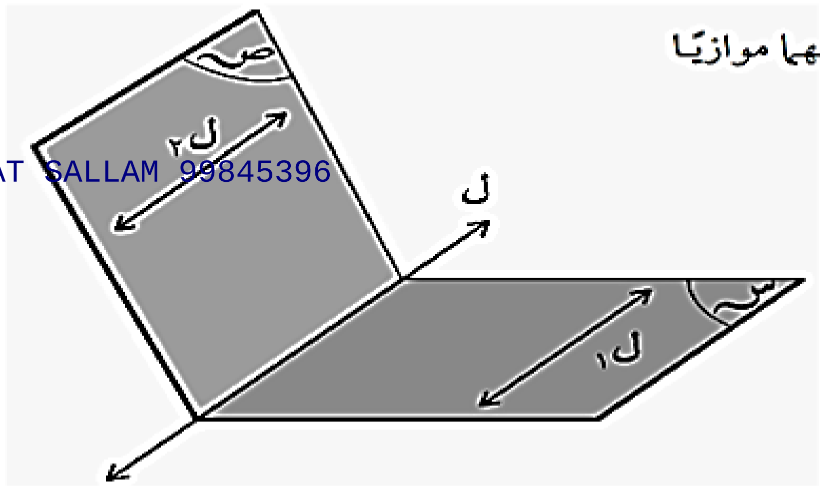
«إذا قطع مستقيم أحد مستويين متوازيين فإنه يقطع الآخر».

س~ // ص~ ، ل ∩ س~ = {أ}

∴ ل ∩ ص~ ≠ ∅ أي ل ∩ ص~ = {ب}

نتيجة (٤):

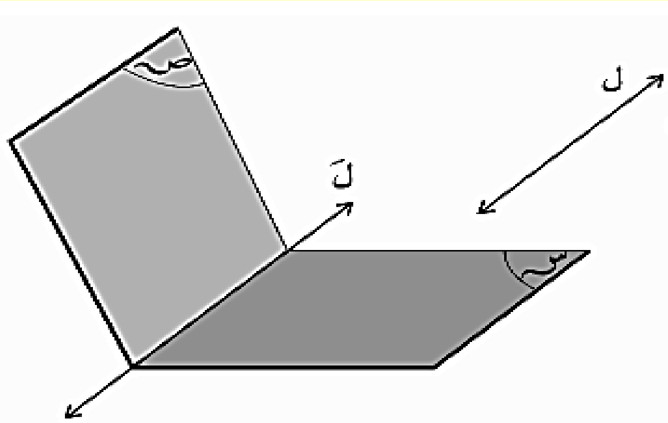
«إذا توازى مستقيمان ومر بكل منهما مستوى وتقطع المستويان كان خط تقاطعهما موازيًا هذين المستقيمين».



، // ل٢ ، ل١ ⊂ س~ ،

٢ ⊂ ص~ ، س~ ∩ ص~ = ل

ل // ل١ // ل٢



نتيجة (٥):

«إذا وازى مستقيم كل من مستويين متقاطعين فإنه يوازي خط تقاطعهما».

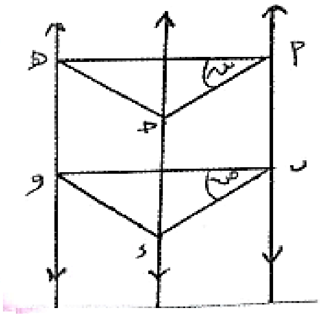
ل // س~ ، ل // ص~ ، س~ ∩ ص~ = لَ

∴ ل // لَ

أمثلة متنوعة

مثال ١ : ثلاث مستقيمات متوازية وغير مستوية قطعها المستوى س في أ ، جـ ، هـ المستوى ص قطعها في ب ، د ، و فإذا كان س // ص

أثبت أن : Δ أ جـ هـ يطابق Δ ب د و .



البرهان :

أ ب // جـ د

∴ يجمعهم مستوى يقطع س ، ص في أ جـ ، ب د

∴ أ جـ // ب د

∴ الشكل أ ب د جـ أصبح متوازي أضلاع

∴ أ جـ = ب د بالمثل : جـ هـ = د و

، أ هـ = ب و

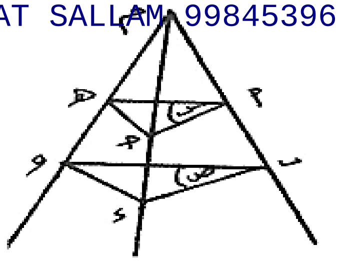
∴ Δ Δ أ جـ هـ ، ب د و متطابقان (ض . ض . ض)

> **انتبه :**
> إذا كانت المستقيمات مستوية فيقطعهم مستقيم ، ليس مستوى

مثال ٢ : ثلاث مستقيمات متلاقية ، غير مستوية ، قطعهم المستوى س في أ ، جـ ، هـ ، المستوى ص في ب ، د ، و فإذا كان س // ص

① أثبت أن Δ Δ أ جـ هـ ، ب د و متشابهان .

البرهان :



∵ س // ص ، قطعهم المستوى م ب د في أ جـ ، ب د

∴ أ جـ // ب د

∴ Δ أ ب د يشابه Δ م أ جـ بسبب تساوي الزوايا

∴ $\frac{\text{م أ}}{\text{م ب}} = \boxed{\frac{\text{م جـ}}{\text{م د}}} = \frac{\text{أ جـ}}{\text{ب د}}$ ← (١)

بالمثل : جـ هـ // د و

∴ $\boxed{\frac{\text{م جـ}}{\text{م د}}} = \frac{\text{جـ هـ}}{\text{د و}} = \boxed{\frac{\text{م هـ}}{\text{م و}}}$ ← (٢)

بالمثل : أ هـ // ب و

∴ $\frac{\text{م أ}}{\text{م ب}} = \frac{\text{أ هـ}}{\text{ب و}} = \frac{\text{م هـ}}{\text{م و}}$ ← (٣)

من (١) ، (٢) ، (٣) ∴ $\frac{\text{أ جـ}}{\text{ب د}} = \frac{\text{جـ هـ}}{\text{د و}} = \boxed{\frac{\text{أ هـ}}{\text{ب و}}}$

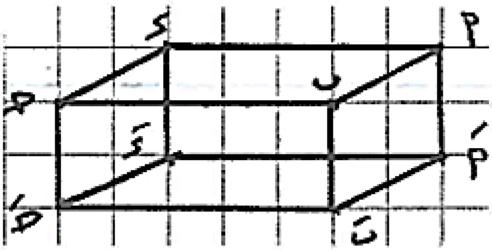
∴ الأضلاع متناسبة

∴ Δ Δ متشابهان .

> **نلاحظ :**
> إذا كانت المستقيمات غير مستوية فيقطعها مستوى .

مثال ٣ : أ ب جـ د أ' ب' جـ' د' متوازي مستطيلات أي المستقيمان متقاطعان ، يوازيان المستوى ب جـ جـ' ب' .

(اختر إجابة)



أ) أ د ، أ ب   ب) د د' ، د جـ

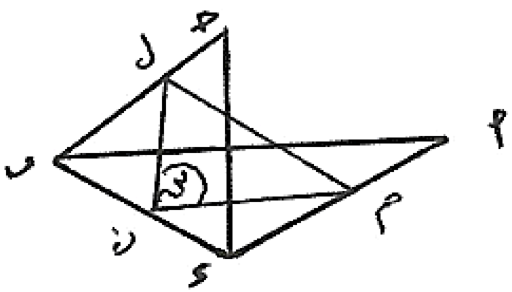
جـ) د د' ، أ' د'   د) أ أ' ، أ' ب'

الحـــل :

د د' // ب ب' ، أ' د' // ب جـ

∴ د د' ، أ' د' يوازيان المستوى ب جـ جـ' ب'

مثال ٤ : أ ب ، جـ د مستقيمان متخالفان رسم المستوى س يوازي كلا منهم ويقطع ب د في ن ، أ د في م ، جـ ب في ل



أثبت أن :

① م ن // أ ب   ② ل ن // جـ د

البرهــان :

① ∵ أ ب // المستوى س ، المستوى د أ ب يمر بـ أ ب ، يقطع س في م ن

∴ أ ب // م ن

② بطريقة أخرى ∵ جـ د // المستوى س   ∴ جـ د لا يلاقي س

∴ جـ د ∩ ل ن = ϕ ، يجمعهم المستوى ب جـ د

∴ جـ د // ل ن

تدريب : ضع علامة (✓) أمام العبارة الصائبة ، وعلامة (✗) أمام العبارة الخطأ :

① إذا توازى مستويان فكل مستقيم في أحدهم يوازي أي مستقيم في الآخر .   (   )

② إذا وازى مستقيم مستويين فإن المستويين يتوازيان .   (   )

③ إذا توازى مستقيمان ، مر بهم مستويان فإن خط تقاطعهم يوازي كلا من المستقيمان   (   )

٤ إذا قطع مستوى مستويين متوازيين فخطا التقاطع متوازيان ( )

٥ إذا وازى مستقيم مستوى فإنه يوازي جميع المستقيمات في المستوى . ( )

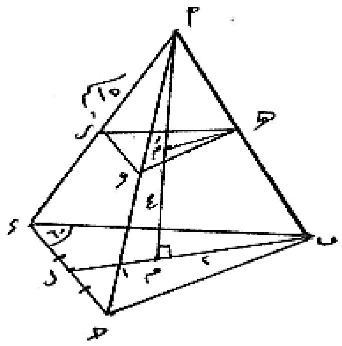
٦ المستقيمان الموازيان لثالث متوازيان . ( )

مثـــــال : أ ب جـ د هرم ثلاثي منتظم طول ضلعه ١٥ سم قطع بمستوى يوازي أحد أوجهــه ، يبعد عنه ٤سم مثل هـ و ز كما بالشكل أحسب :

١ ارتفاع الهرم الأصلي

٢ ارتفاع الهرم الناتج من قطع المستوى لأوجه الهرم

٣ النسبة : أ هـ : هـ ب



البرهـــان : $\overline{\text{أ م}}$: ارتفاع الهرم يلاقي القاعدة عند مركزها م

ب ل = ١٥ جا ٦٠ ١٥ $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ $\frac{١٥\sqrt{٣}}{٢}$ ≃ ١٣

ب م = $\frac{٢}{٣}$ (لأن م ملتقى متوسطات)

ب م $\frac{٢}{٣}$ ١٣ ٨٫٧ سم

في المثلث القائم :

المقابل = الوتر × جا الزاوية

∴ في Δ أ ب م :

أ م = ارتفاع الهرم $\sqrt{١٥^٢ \quad ٨٫٧^٢}$ ١٢٫٢ سم تقريباً

∴ ارتفاع الهرم الأصغر = ١٢.٢ − ٤ = ٨.٢٤

∵ المستوى هـ و ز // المستوى ب جـ د ، قطعهم المستوى في أ ب م في :

$\overline{\text{هـ م}'}$ ، $\overline{\text{ب م}}$ ∴ $\overline{\text{هـ م}'}$ // $\overline{\text{ب م}}$

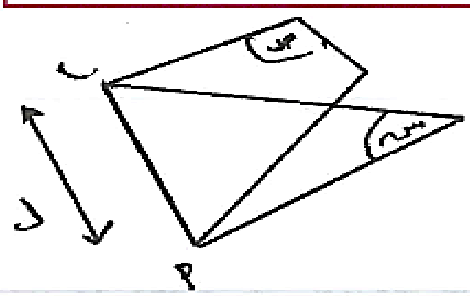
∴ $\frac{\text{أ هـ}}{\text{هـ ب}} = \frac{\text{أ م}'}{\text{م}'\text{ م}}$ $\frac{\text{أ هـ}}{\text{هـ ب}}$ $\frac{٨٫٢٤}{٤}$ ٢٫٠٦

حقيقة هندسية

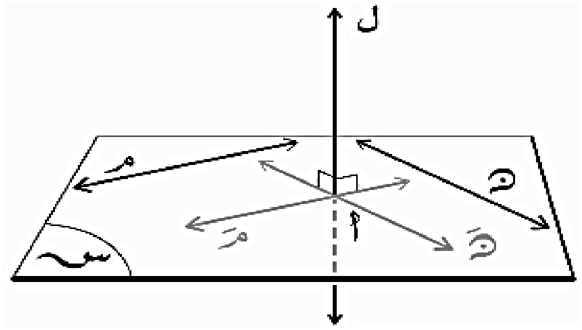
إذا وازى مستقيم مستويين متقاطعين فإنه يوازي خط تقاطعهم .

∵ $\overleftrightarrow{\text{ل}}$ // س ، $\overleftrightarrow{\text{ل}}$ // ص

فإن $\overleftrightarrow{\text{ل}}$ // $\overline{\text{أ ب}}$ (خط تقاطع س ، ص)



التعامد



نظـــرية :

المستقيم العمودي على أي مستقيمين غير متوازيين في مستوى يكون عموديًّا على هذا المستوى.

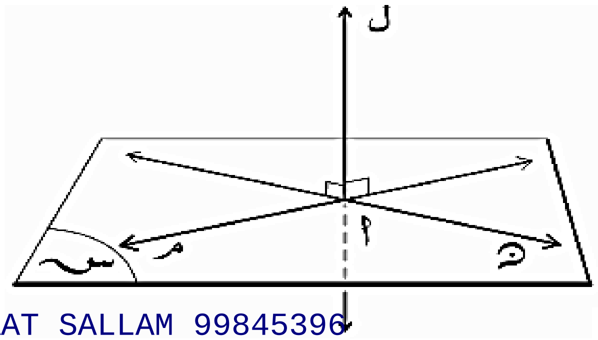
∵ ل ⊥ ن ، ل ⊥ م

∴ ل ⊥ المستوى س .

وواضح أن أي مستقيمان في المستوى وغير متوازيين يكونا متقاطعان .
لأنه يمكن رسم من نقطة هـ على ل مستقيمان يوازيان ن ، م

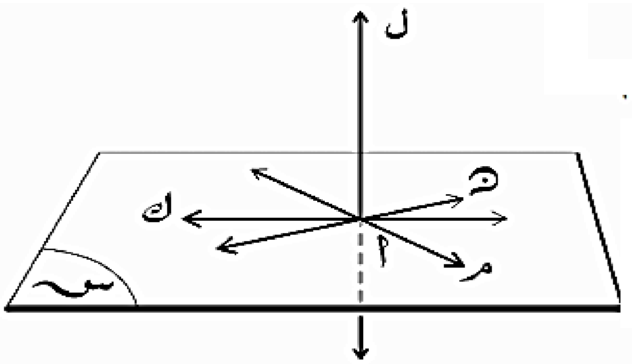
∴ **نستنتج أن :**

المستقيم العمودي على مستقيمين متقاطعين من نقطة تقاطعهم يكون عمودياً على مستواهم .

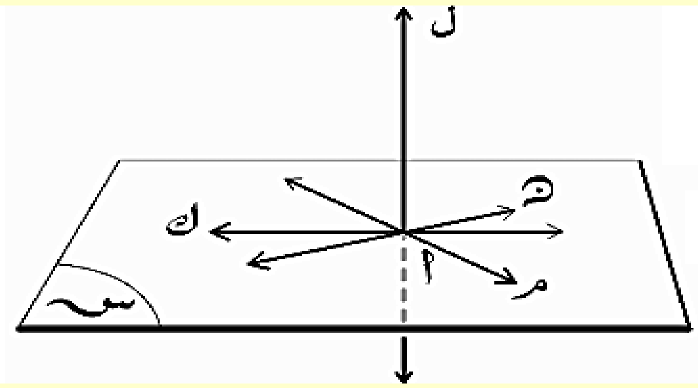


نتائج هامة:

(١) «المستقيم العمودي على كل من مستقيمين متقاطعين من نقطة تقاطعهما يكون عموديًّا على مستويهما».

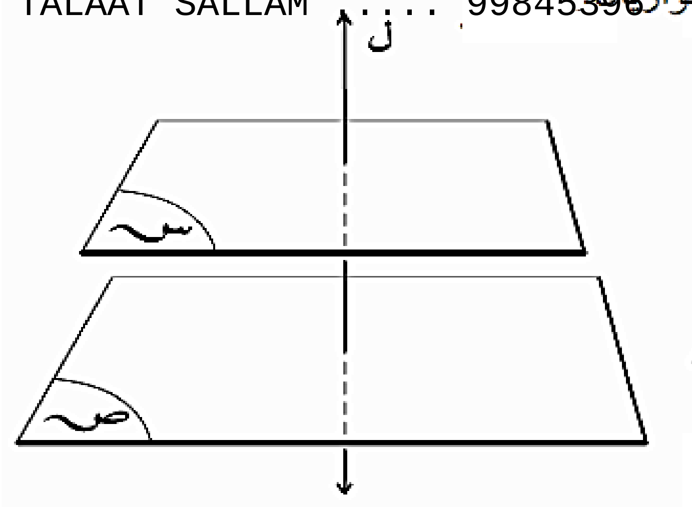


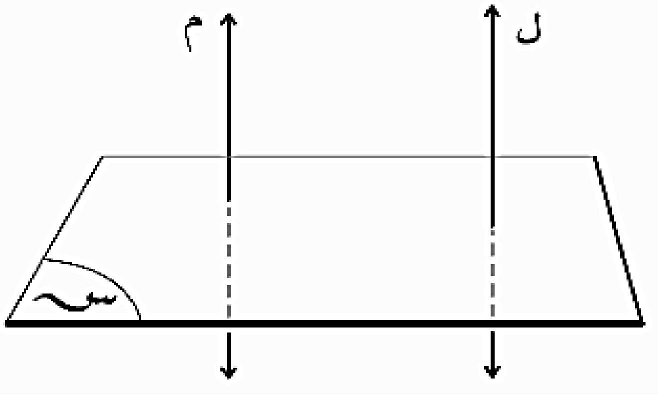
(٢) جميع المستقيات العمودية على مستقيم معلوم من نقطة واحدة عليه تقع في مستوى واحد عمودي على المستقيم



(٣) يوجد مستوى واحد وواحد فقط عمودي على مستقيم معلوم من نقطة عليه.

(٤) المستقيمان العمودان على مستوى واحد متوازيان

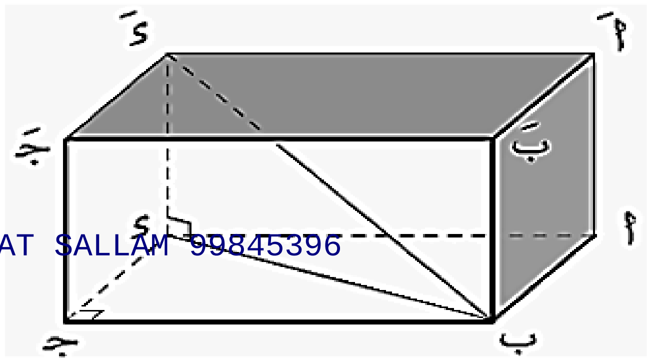




(٥) إذا كان مستقيمٌ عموديًا على كل من مستويين مختلفين، فإنهما يكونان متوازيين.

كذلك؛ إذا كان مستقيمٌ عموديًا على أحد مستويين متوازيين، فإنه يكون عموديًا على المستوى الآخر.

<u>مثــــال ١ :</u>



أثبت أن مربع طول قطر متوازي المستطيلات يساوي مجموع مربعات أبعاده الثلاثة:

أ ب جـ ء أَ بَ جَ ءَ متوازي المستطيلات، أثبت أن: (ب ءَ)^{٢} = (ب جـ)^{٢} + (ء جـ)^{٢} + (جـ جَ)^{٢} .

<u>الحـــــل :</u>

∵ أ ب جـ ء مستطيل ∴ (ب ء)^{٢} = (ب جـ)^{٢} + (ء جـ)^{٢} .... (١)

∵ $\overline{\text{ءءَ}}$ ⊥ المستوى أ ب جـ ء ∴ $\overline{\text{ءءَ}}$ ⊥ $\overline{\text{ب ء}}$ ∴ (ب ءَ)^{٢} = (ب ء)^{٢} + (ء ءَ)^{٢} .. (٢)

∵ ء ءَ = جـ جَ من خواص متوازي المستطيلات ومن (١) ، (٢)

(ب ءَ)^{٢} = (ب جـ)^{٢} + (ء جـ)^{٢} + (جـ جَ)^{٢} .

<u>تنويه :</u>

(١) إذا كان س، ص، ع هي أبعاد متوازي المستطيلات، فإن:

طول قطر متوازي المستطيلات = $\sqrt{\text{س}^{٢} + \text{ص}^{٢} + \text{ع}^{٢}}$

(٢) إذا كان س = ص = ع = ل ، فإن متوازي المستطيلات يصبح مكعبًا، ويكون طول قطر المكعب = ل $\sqrt{٣}$.

MR : TALAAT SALLAM 99845396

تنويه :

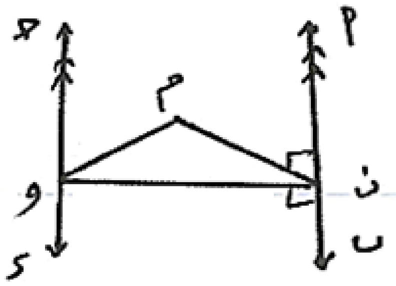
(١) إذا كان س، ص، ع هي أبعاد متوازي المستطيلات، فإن:

طول قطر متوازي المستطيلات $= \sqrt{س^2 + ص^2 + ع^2}$

(٢) إذا كان س = ص = ع = ل، فإن متوازي المستطيلات يصبح مكعبًا، ويكون طول قطر المكعب $= ل\sqrt{3}$.

مثــال ٢ : في الشكل : $\overleftrightarrow{أب} // \overleftrightarrow{جـ د}$ ، $\overleftrightarrow{أب} \perp \overleftrightarrow{ن م}$ ، $\overleftrightarrow{ن و}$ أثبت أن: ق م و جـ = ٩٠°

البرهــان :



∵ $\overleftrightarrow{أب} \perp \overleftrightarrow{ن م}$ ، $\overleftrightarrow{ن و}$

∴ $\overleftrightarrow{أب} \perp$ المستوى ن م و .

، ∵ $\overleftrightarrow{جـ د} // \overleftrightarrow{أب}$ ∴ $\overleftrightarrow{جـ د} \perp$ المستوى ن م و .

∴ $\overleftrightarrow{جـ د} \perp$ اي مستقيم في المستوى ن م و

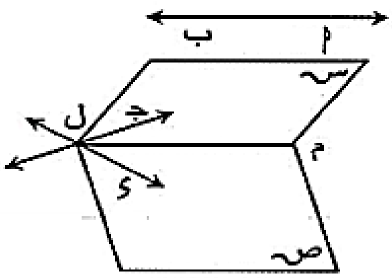
∴ $\overleftrightarrow{جـ د} \perp \overleftrightarrow{و م}$ ق م و جـ = ٩٠°

مثــال ٣ : س ، ص مستويان متقاطعان في $\overline{ل م}$ ، $\overline{أب}$ يوازي كلاً من المستويين

MR:TALAAT SALLAM 99845396

س ، ص . اثبت أن: $\overline{أب} // \overline{ل م}$.

البرهــان :



$\overline{أب}$ ، النقطة ل يعينان مستوى وليكن ع يقطع المستوى س في $\overline{ل جـ}$ ، ويقطع المستوى ص في $\overline{ل د}$.

$\overline{أب}$ // المستوى س ، $\overline{ل جـ} \subseteq$ س

∴ $\overline{أب} // \overline{ل جـ}$ .... (١)

∵ $\overline{أب}$ // المستوى ص ، $\overline{ل د} \subseteq$ ص

∴ $\overline{أب} // \overline{ل د}$ .... (٢)

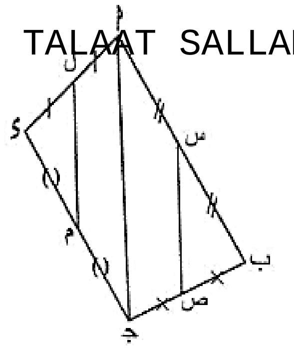
من (١)، (٢) نجد أن:

$\overline{أب}$ // كلاً من $\overline{ل جـ}$ ، $\overline{ل د}$ وهذا غير ممكن إلا إذا انطبق كل من $\overline{ل جـ}$ ، $\overline{ل د}$ على $\overline{ل م}$

∴ $\overline{أب} // \overline{ل م}$.

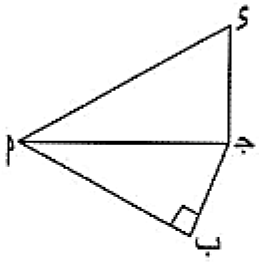
تدريب : أ، ب، جـ، د أربع نقط ليست في مستو واحد نصفت: أب في س، ب جـ في ص، جـ د في ع، أد في ل. أثبت أن:

أ) س ص // المستوى أد جـ. ب) النقط س، ص، ع، ل تقع في مستوٍ واحد.



مثـــال : أ ب جـ مثلث قائم الزاوية في ب، رسمت القطعة المستقيمة $\overline{جـ د}$ عمودية على المستوى أ ب جـ.

أثبت أن: $(أد)^٢ = (أب)^٢ + (ب جـ)^٢ + (جـ د)^٢$



الحـــل : المعطيات: أ ب جـ مثلث قائم الزاوية في ب، رسمت $\overline{جـ د}$ عمودية على المستوى أ ب جـ.

المطلـــوب: إثبات أن: $(أد)^٢ = (أب)^٢ + (ب جـ)^٢ + (جـ د)^٢$

البرهـــان: ∵ $\overline{جـ د}$ ⊥ مستوى المثلث أ ب جـ، ∴ $\overline{جـ د} \perp \overline{جـ أ}$

فـــي Δ أ جـ د : $(أد)^٢ = (أجـ)^٢ + (جـ د)^٢$ .... (١)

وفـــي Δ أ ب جـ : $(أجـ)^٢ = (أب)^٢ + (ب جـ)^٢$ .... (٢)

من (١)، (٢) : ∴ $(أد)^٢ = (أب)^٢ + (ب جـ)^٢ + (جـ د)^٢$

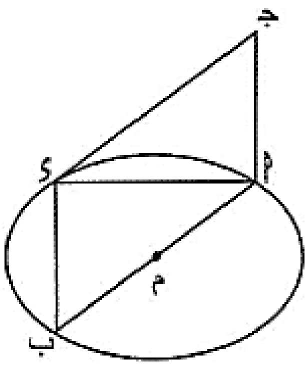
مثـــال : في الشكل المجاور: $\overline{أب}$ قطر في الدائرة م، رسم $\overline{أجـ}$ عمودي على مستوى الدائرة. فإذا كانت د نقطة من نقط الدائرة، فأثبت أن $\overline{ب د}$ ⊥ المستوى أ جـ د.

الحـــل :

المعطيات: $\overline{أب}$ قطر في الدائرة م. $\overline{أجـ}$ ⊥ مستوى الدائرة م.

المطلـــوب: إثبات أن: $\overline{ب د}$ ⊥ المستوى أ جـ د.

البرهـــان:



∵ $\overline{أجـ}$ ⊥ مستوى الدائرة م.

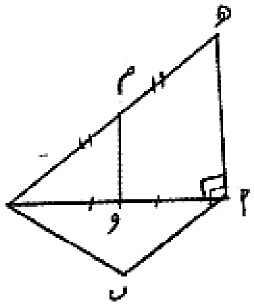
∴ $\overline{أجـ} \perp \overline{ب د}$ ⇐ $\overline{ب د} \perp \overline{أجـ}$

ولكن $\overline{ب د} \perp \overline{أد}$ (انظر الملاحظة أعلاه).

أي أن: $\overline{ب د}$ ⊥ كل من $\overline{أجـ}$ ⊥ $\overline{أد}$ الواقعان في المستوى جـ أ د.

∴ $\overline{ب د}$ ⊥ المستوى أ جـ د.

مثـــال ٦ : Δ أ ب جـ، هـ نقطة خارج مستواه حيث أ هـ عمودية على كل من أ ب ، أ جـ فإذا كانت و منتصف أ جـ ، م منتصف هـ جـ أثبت أن م و $\perp$ أ ب



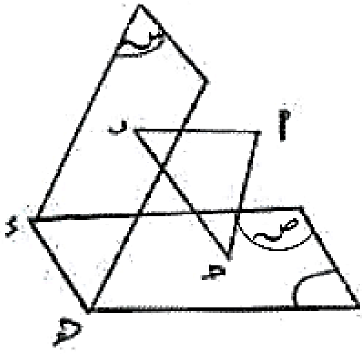
البرهـــان : في Δ أ ب هـ ∵ م منتصف هـ جـ ، و منتصف أ جـ

∴ م و // أ هـ ،

∵ أ هـ $\perp$ المستوى أ ب جـ

∴ م و $\perp$ المستوى أ ب جـ

مثـــال ٧ : س ، ص مستويان متقاطعان في د هـ ، نقطة خارج المستويان ، رسم أ ب $\perp$ س ، أ جـ $\perp$ ص أثبت أن : جـ ب $\perp$ د هـ .



البرهـــان : ∵ أ ب $\perp$ س ∴ أ ب $\perp$ د هـ

، ∵ أ جـ $\perp$ ص ∴ أ جـ $\perp$ د هـ

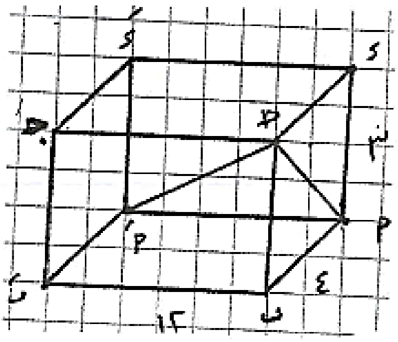
أصبح د هـ $\perp$ أ جـ ، أ ب

∴ د هـ $\perp$ المستوى أ جـ ب ∴ د هـ $\perp$ جـ ب

مثـــال : أ ب جـ د أ' ب' جـ' د' منشور قائم أبعاده ١٢سم ، ٤سم، ٣سم قاعدته مستطيلة

(١) أوجد طول أ جـ ، أ' جـ

(٢) أوجد مساحة Δ أ أ' جـ



الحـــل : (١) (أ جـ)^٢ = ٩ + ١٦ (Δ أ د جـ قائم في د)

∴ أ جـ = $\sqrt{٢٥}$ = ٥

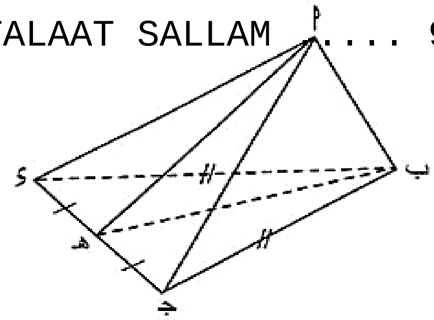
جـ أ' : قطر لمتوازي المستطيلات أو بالمثلث القائم

جـ أ' = $\sqrt{١٤٤ \ ١٦ \ ٩}$ ١٣سم .

(٢) لإيجاد مساحة Δ أ أ' جـ :

∵ أ أ' $\perp$ المستوى أ ب جـ د ∴ أ أ' $\perp$ أ جـ

∴ مساحة Δ = $\frac{١}{٢}$ أ جـ × أ أ' = $\frac{١}{٢}$ x ٥ x ١٢ = ٣٠سم^٢



مثـــال ٩ : أ ب جـ د هـرم ثلاثي فيه ب جـ = ب د ، ق$(\widehat{\text{أ ب جـ}})$ = ق$(\widehat{\text{أ ب د}})$ ، هـ منتصف $\overline{\text{جـ د}}$ ، أثبت أن $\overline{\text{جـ د}}$ $\perp$ مستوى المثلث أ ب هـ .

الحـــل : **المعطيـــات:** أ ب جـ د هـرم ثلاثي فيه ب جـ = ب د ، ق$(\widehat{\text{أ ب جـ}})$ = ق$(\widehat{\text{أ ب د}})$ ، هـ منتصف $\overline{\text{جـ د}}$.

المطلـــوب: إثبات أن: $\overline{\text{جـ د}}$ $\perp$ المستوى أ ب هـ .

البرهـــان: في المثلث ب جـ د: ب جـ = ب د ، هـ منتصف $\overline{\text{جـ د}}$.

∴ $\overline{\text{ب هـ}}$ $\perp$ $\overline{\text{جـ د}}$ .... (١) ، ∴ المثلثان أ ب جـ ، أ ب د فيهما:

$\overline{\text{أ ب}}$ مشترك، ب جـ = ب د ، ق$(\widehat{\text{أ ب جـ}})$ = ق$(\widehat{\text{أ ب د}})$

∴ المثلثان متطابقان ومن ذلك نجد أن أ جـ = أ د

∴ المثلث أ جـ د متساوي الساقين، $\overline{\text{أ هـ}}$ يقطع $\overline{\text{جـ د}}$ في منتصفه.

∴ $\overline{\text{أ هـ}}$ $\perp$ $\overline{\text{جـ د}}$ .... (٢)

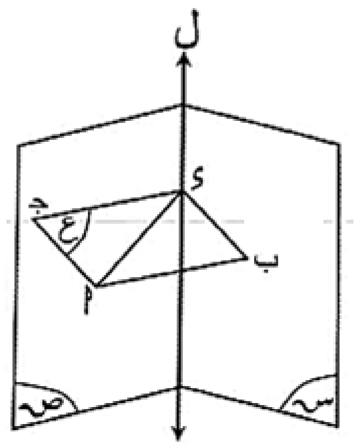
من م(١)، (٢):

∴ $\overline{\text{جـ د}}$ $\perp$ كل من $\overline{\text{ب هـ}}$ ، $\overline{\text{أ هـ}}$

∴ $\overline{\text{جـ د}}$ عمودي على مستوييهما أ ب هـ .

مثـــال ١٠ : س ، ص متقاطعان في المستقيم ل، أ نقطة لا تنتمي لأي منهما رسم $\overline{\text{أ ب}}$ $\perp$ المستوى س ليقطعه في ب، $\overline{\text{أ جـ}}$ $\perp$ المستوى ص ليقطعه في جـ ثم رسم $\overline{\text{ب د}}$ $\perp$ المستقيم ل ليقطعه في د .

أثبت أن $\overline{\text{جـ د}}$ عمودي على المستقيم ل.



الحـــل : **المعطيـــات:** المستوى س $\cap$ المستوى ص = ل ،

أ $\not\in$ س ، أ $\not\in$ ص ، $\overline{\text{أ ب}}$ $\perp$ س ، $\overline{\text{أ جـ}}$ $\perp$ ص ،

$\overline{\text{ب د}}$ $\perp$ المستقيم ل.

المطلـــوب: إثبات أن: $\overline{\text{جـ د}}$ $\perp$ ل.

البرهـــان:

∵ $\overline{\text{أ ب}}$ $\perp$ س ∴ $\overline{\text{أ ب}}$ $\perp$ ل

$\overline{\text{ب د}}$ $\perp$ ل ∴ المستوى أ ب د $\perp$ ل

∵ المستوى أ ب ى هو نفس المستوى أ

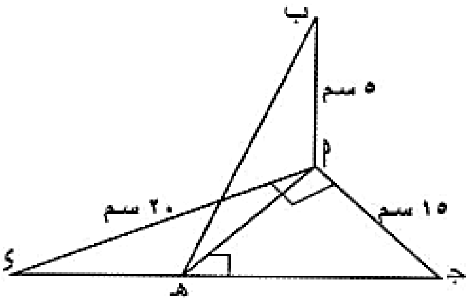
∴ أ ب جـ ى ⊥ ل

∴ $\overline{\text{جـ ى}}$ ⊥ ل وهو المطلوب

مثال ١١ : في الشكل المجاور: أ جـ ى مثلث قائم الزاوية في أ وفيه: أ جـ = ١٥ سم، أ ى = ٢٠ سم. رسم أ ب عمودي على مستوى المثلث أ جـ ى بحيث كان أ ب = ٥ سم، ثم رسم $\overline{\text{أ هـ}}$ ⊥ $\overline{\text{جـ ى}}$ والمطلوب:

١) أثبت أن $\overline{\text{ب هـ}}$ ⊥ $\overline{\text{جـ ى}}$. ٢) أوجد طول $\overline{\text{ب هـ}}$.

الحـــل :



∵ $\overline{\text{أ ب}}$ ⊥ مستوى المثلث أ جـ ى . ∴ $\overline{\text{أ ب}}$ ⊥ $\overline{\text{جـ ى}}$

∴ $\overline{\text{جـ ى}}$ ⊥ $\overline{\text{أ ى}}$ .... (١)

ولكن $\overline{\text{جـ ى}}$ ⊥ $\overline{\text{أ هـ}}$ (فرضاً) .... (٢)

من (١)، (٢) نجد أن: $\overline{\text{جـ ى}}$ ⊥ مستوى المثلث أ ب هـ .

∴ $\overline{\text{جـ ى}}$ ⊥ $\overline{\text{ب هـ}}$ ⇐ $\overline{\text{ب هـ}}$ ⊥ $\overline{\text{جـ ى}}$

∴ في المثلث أ جـ ى : (جـ ى)^2 = (أ جـ)^2 + (أ ى)^2

∴ جـ ى = ٢٥

∵ المثلث أ جـ ى قائم الزاوية في أ ، $\overline{\text{أ هـ}}$ ⊥ $\overline{\text{جـ ى}}$

∴ أ هـ = $\dfrac{\text{أ جـ} \times \text{أ ى}}{\text{جـ ى}}$ = ١٢ ملاحظة: أ هـ × جـ ى = أ جـ × أ ى (مثلث قائم الزاوية)

∵ $\overline{\text{أ ب}}$ ⊥ مستوى المثلث أ جـ ى ∴ $\overline{\text{أ ب}}$ ⊥ $\overline{\text{أ هـ}}$

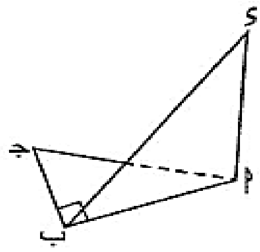
المثلث ب أ هـ قائم الزاوية في أ.

(ب هـ)^2 = (أ ب)^2 + (أ هـ)^2

∴ ب هـ = ١٣

مثال ١٢ : أ ب جـ مثلث قائم الزاوية في ب، رسمت القطعة المستقيمة $\overline{\text{أ ى}}$ عمودية على المستوى أ ب جـ، أثبت أن: $\overline{\text{ى ب}}$ ⊥ $\overline{\text{ب جـ}}$.

الحـــل :



∵ $\overline{\text{أ ى}}$ ⊥ مستوى المثلث أ ب جـ .

∴ $\overline{\text{أ ى}}$ ⊥ $\overline{\text{ب جـ}}$ ....(١)

ولكن $\overline{\text{ب جـ}}$ ⊥ $\overline{\text{أ ى}}$ ....(٢)

من (١)، (٢):

∴ $\overline{\text{ب جـ}}$ ⊥ مستوى المثلث أ ب ى .

∴ $\overline{\text{ب جـ}}$ ⊥ $\overline{\text{ى ب}}$

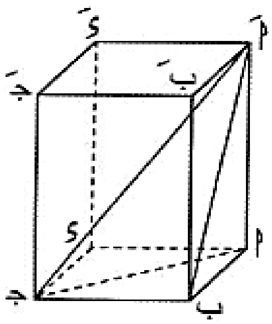
مثال ١٣ : أ ب جـ ء أَ بَ جَ ءَ متوازي سطوح مستطيلات أبعاده هي: ب جـ = [illegible] أ ب = [illegible] سم، ب بَ = ١٢سم، والمطلوب:

أولاً: أثبت أن: $\overline{\text{ب جـ}} \perp \overline{\text{ب أَ}}$.

ثانياً: أثبت أن: (أ جَ)^2 = (أ ب)^2 + (ب جـ)^2 + (ب بَ)^2

ثالثاً: أوجد طول أَ جـ ، ثم استنتج قاعدة لإيجاد طول قطر متوازي السطوح المستطيلة.

الحـــل : العمل: نصل أ جـ.



∵ $\overline{\text{ب جـ}} \perp \overline{\text{ب بَ}}$ ، ∵ $\overline{\text{ب جـ}} \perp \overline{\text{أ ب}}$

∴ $\overline{\text{ب جـ}} \perp$ المستوى أ ب بَ أَ .

∴ $\overline{\text{ب جـ}} \perp \overline{\text{ب أَ}}$ (أولاً).

∵ $\overline{\text{أ أَ}} \perp$ المستوى أ ب جـ ء ، ∴ $\overline{\text{أ أَ}} \perp \overline{\text{أ جـ}}$

∴ في المثلث أَ أ جـ : (أَ جـ)^2 = (أ أَ)^2 + (أ جـ)^2

ولكن في المستطيل أ ب جـ ء فإن:

(أ جـ)^2 = (أ ب)^2 + (ب جـ)^2

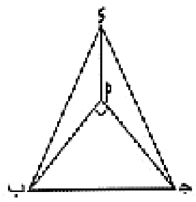
وحيث أن أ أَ = ب بَ (من خواص متوازي السطوح).

∴ (أَ جـ)^2 = (ب بَ)^2 + (أ ب)^2 + (ب جـ)^2 (ثانياً)

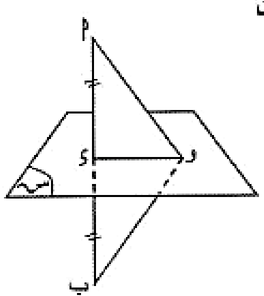
∴ (أَ جـ)^2 = ١٤٤ + ١٦ + ٩ = ١٦٩

∴ أَ جـ = ١٣سم

تدريب : ١) أ ب جـ مثلث قائم الزاوية في أ، رسمت القطعة المستقيمة $\overline{\text{أ ء}}$ عمودية على المستوى أ ب جـ أثبت أن: (ء ب)^2 + (ء جـ)^2 = ٢(أ ء)^2 + (ب جـ)^2



٢) القطعة المستقيمة $\overline{\text{أ ب}}$ تقطع المستوى س في و وبحيث أ و = ب و ، فإذا كانت $\overline{\text{أ ب}}$ عمودية على س فأثبت أن أي نقطة ء ∈ س تكون على بعدين متساويين من أ ، ب .

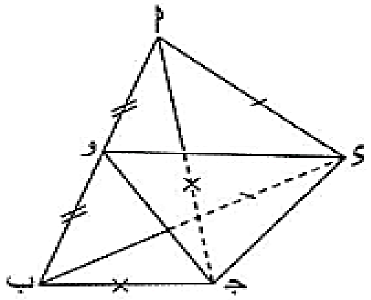


مثـــال ١٤ : $ا ب جـ ء$ هرم ثلاثي فيه : $ا جـ = جـ ب$ ، $ء ا = ء ب$ ، $و$ منتصف $\overline{ا ب}$ في (و). أثبت أن:

أولاً: $\overline{ا ب} \perp$ المستوى $و جـ ء$.

ثانيًا: $\overline{جـ ء} \perp$ المستوى $ا ب جـ$.

الحـــــل :



في Δ $ء ا ب$: $ء ا = ء ب$ ، و منتصف $ا ب$.

$\therefore \overline{ء و} \perp \overline{ا ب}$

$\therefore \overline{ا ب} \perp \overline{ء و}$ ....(١)

وبالمثل في Δ $جـ ا ب$:

$جـ ا = جـ ب$ ، و منتصف $ا ب$.

$\therefore \overline{جـ و} \perp \overline{ا ب}$

$\therefore \overline{ا ب} \perp \overline{جـ و}$ ....(٢)

من (١)، (٢): $\therefore \overline{ا ب} \perp$ مستوى المثلث $و ء جـ$.

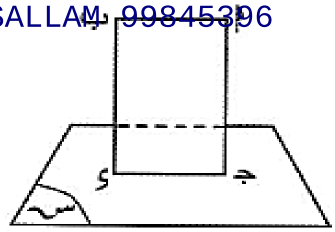
$\therefore \overline{ا ب} \perp \overline{جـ ء}$ $\quad \therefore \overline{جـ ء} \perp \overline{ا ب}$

ولكن $\overline{ء جـ} \perp \overline{ا جـ}$ (فرضاً)

$\therefore \overline{جـ ء} \perp$ المستوى $ا ب جـ$.

مثـــال ١٥ : $ا$ ، $ب$ نقطتان لا تنتميان لمستوى $س$، $\overline{ا جـ} \perp س$ ، $\overline{ب ء} \perp س$ ، $ا جـ = ب ء$.

برهن أن: $\overline{ا ب} \mathbin{//} س$.



$\because \overline{ا جـ} \perp س$ ، $\overline{ب ء} \perp س$

$\therefore \overline{ا جـ} \mathbin{//} \overline{ب ء}$

ولكن $ا جـ = ب ء$

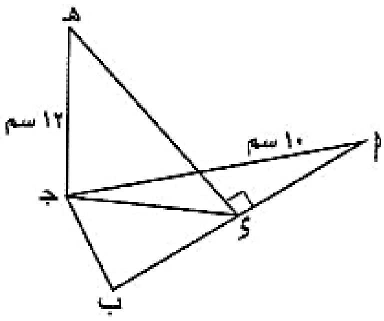
$\therefore$ الشكل $ا ب ء جـ$ متوازي أضلاع

$\therefore \overline{ا ب} \mathbin{//} \overline{جـ ء}$

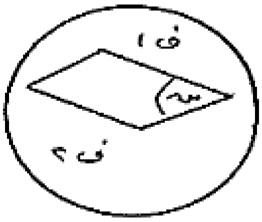
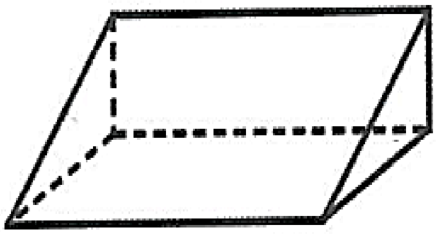
ولكن $جـ ء \subseteq س$ ، $\therefore \overline{ا ب} \mathbin{//} س$

تدريب : $ا ب جـ$ مثلث فيه : $ق(\hat{ا}) = ٣٠^\circ$ رسمت $\overline{جـ هـ} \perp$ المثلث $ا ب جـ$، كما رسمت $\overline{ء هـ} \perp \overline{ا ب}$، فإذا كان $جـ هـ = ١٢$ سم، $ا جـ = ١٠$ سم.

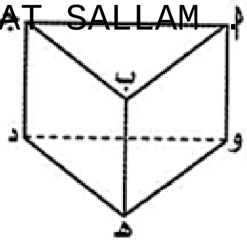
فأوجد طول كل من: $\overline{ء جـ}$ ، $\overline{ء هـ}$.



أولا : الاسئلة الموضوعية :

م	الســــــــــــــــــــؤال	الاجابة
-1	إذا كان المستوى هو س ، الفضاء ف فأي العبارات الآتية صحيحة :  (أ) ف١ ∪ ف٢ = ف (ب) ف١ ∩ ف٢ = ف (ج) ف١ ∪ ف٢ ∪ س = ف (د) ف١ ∪ ف٢ ∩ س = ف	
-2	عدد المستويات التي يمكن رسمها وتمر بنقطة : (أ) صفر (ب) ١ (ج) ٢ (د) لا نهائي	
-3	عدد المستقيمات التي يمكن رسمها وتمر بنقطة : (أ) ٢ (ب) ٣ (ج) ٤ (د) لا نهائي	
-4	عدد المستويات التي يمكن رسمها وتمر بنقطتين : (أ) صفر (ب) ١ (ج) ٢ (د) لا نهائي	
4	" سطح لا حدود له حيث أن المستقيم المار بأي نقطتين فيه يقع بأكمله على ذلك السطح" ما المفهوم الهندسي الذي تعبر عنه العبارة السابقة؟ أ) نقطة ب) مستقيم ج) مستوى د) فراغ	
5	أي ممـــــا يــــأتي يحـــــدد الفـــــراغ؟ أ) مستقيمان متقاطعان ب) مستوى ونقطة خارجة عنه ج) مستقيمان متوازيان د) مستوى ونقطة تنتمي إليه	
6	مــا عــدد المســتويات في الشــكل المقابــل؟  أ) ٣ ب) ٤ ج) ٥ د) ٦	

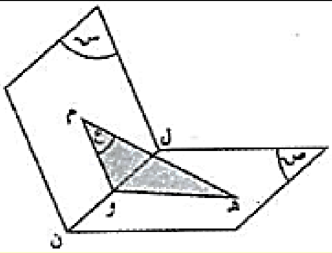
-6 من الشكل المقابل، فيمَ يتقاطع المستويان أ ب ج، أ ب هـ؟



أ) $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ ب) $\overleftrightarrow{\text{أو}}$

ج) $\overleftrightarrow{\text{وهـ}}$ د) $\overleftrightarrow{\text{بهـ}}$

-7 في الشكل المقابل، س ∩ ص ∩ ع =



أ) {م} ب) {و}

ج) $\overleftrightarrow{\text{ل ن}}$ د) $\overleftrightarrow{\text{م هـ}}$

-8 كم مستوى يمكن رسمه من أربع نقاط منها ثلاث على استقامة واحدة؟

أ) ١ ب) ٢ ج) ٣ د) ٤

-9 أقل عدد من النقاط تلزم لتحديد فراغ هو:

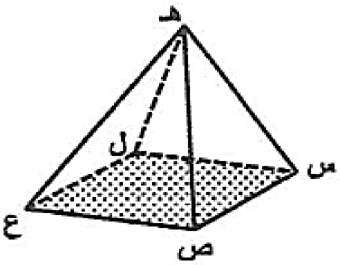
أ) ١ ب) ٣ ج) ٤ د) ٦

-10 إذا كان $\overleftrightarrow{\text{ل}}$ يوازي المستوى س ولا ينطبق عليه فإن:

أ) $\overleftrightarrow{\text{ل}} \cap \text{س} = \{\text{م}\}$ ب) $\overleftrightarrow{\text{ل}} \cup \text{س} = \overleftrightarrow{\text{ل}}$

ج) $\overleftrightarrow{\text{ل}} \cup \text{س} = \text{س}$ د) $\overleftrightarrow{\text{ل}} \cap \text{س} = \emptyset$

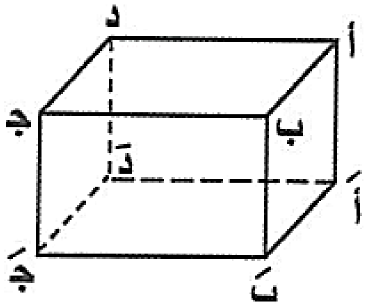
-11 أي من المستقيمات التالية تخالف $\overleftrightarrow{\text{هـ ل}}$ في الشكل المقابل؟



أ) $\overleftrightarrow{\text{س ل}}$ ب) $\overleftrightarrow{\text{ل ع}}$

ج) $\overleftrightarrow{\text{ص ع}}$ د) $\overleftrightarrow{\text{هـ ص}}$

-12 في الشكل المقابل، أي مما يلي يمثل مستقيمين متخالفين؟



أ) $\overleftrightarrow{\text{أ د}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{أَ بَ}}$ ب) $\overleftrightarrow{\text{أ د}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{بَ جَ}}$

ج) $\overleftrightarrow{\text{د ج}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{أَ بَ}}$ د) $\overleftrightarrow{\text{د ج}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{دَ جَ}}$

-12 كـم عـدد المسـتويات الـتي تحـددها ثـلاث نقاط علـى اسـتقامة واحدة

أ) صفر ب) ١ ج) ٢ د) ٣

-13 إذا كان أ، ب نقطتان مختلفتان في الفضاء، فما عدد المستقيمات التي يمكن أن تمر بهما؟

أ) ١ ب) ٢ ج) ٣ د) عدد لا نهائي

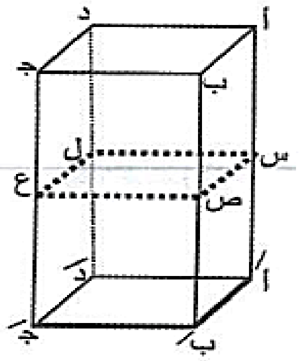
-14 في الشكل المقابل:

أ أ′ ب′ ب ∩ ب ب′ جـ′ جـ ∩ س ص ع ل

تساوي ....

أ) $\overleftrightarrow{\text{ب ب′}}$ ب) $\overleftrightarrow{\text{س ص}}$

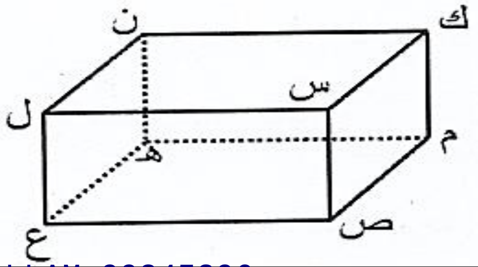
ج) {ص} د) {س}



-15 في شبه المكعب المقابل: المستقيم المُتخالف مع المستقيم $\overleftrightarrow{\text{س ص}}$ هو:

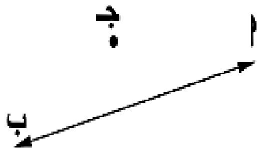
أ) $\overleftrightarrow{\text{ن هـ}}$ ب) $\overleftrightarrow{\text{ص ع}}$

ج) $\overleftrightarrow{\text{ك م}}$ د) $\overleftrightarrow{\text{م هـ}}$



-16 في الشكل المقابل : عدد المستويات التي تمر بالنقطة جـ ،

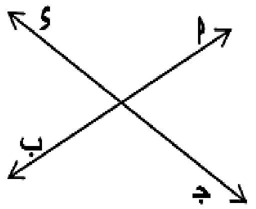
والمستقيم $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ تساوي:



أ) صفر ب) ١ جـ) ٢ د) ٣

-17 في الشكل المقابل : $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{جـ ء}}$ مستقيمان متقاطعان ،

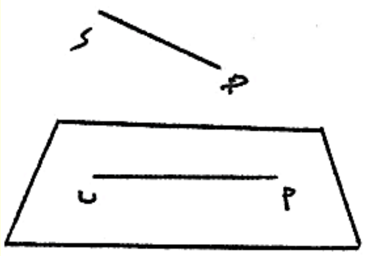
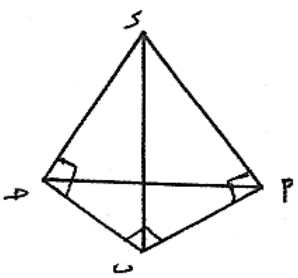
فإن عدد المستويات التي يعينانها يساوي :

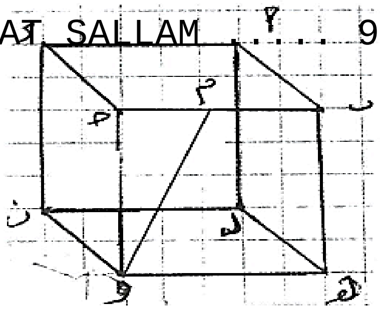
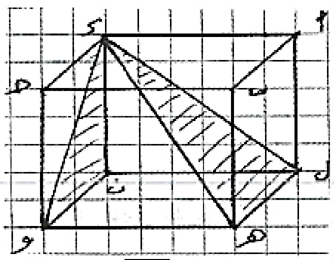


أ) ١ ب) ٢ جـ) ٣ د) ٤

-18 عدد المستقيمات التي يمكن رسمها وتمر بنقطتين :

أ) ١ ب) ٢ جـ) ٣ د) لا نهائي

-19	عدد المستويات التي تحوي مستقيمان متوازيان أ) ١ ب) ٢ ج) ٣ د) لا نهائي	
-20	أي العبارات التالية غير صحيحة : أ) إذا توازى مستويان فكل مستقيم في المستوى الأول يوازي المستوى الآخر ب) إذا كان أ ، ب ∈ س فإن $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ ⊂ س جـ) إذا كان أ ∈ س ، أ ∈ ص فإن س يقاطع ص في مستقيم . د) إذا وازى مستقيم مستوى فإنه يوازي كل مستقيم في المستوى .	
-21	إذا كان هـ ∈ $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ ، ن ∉ $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ فإن المستويان س ، ص ينطبقان إذا كانا يمران بالنقط : أ) أ ، ب ب) أ ، ب ، ن جـ) هـ ، أ د) هـ ، أ ، ب	
-22	لا يتعين المستوى في الحالة التالية : أ) مستقيمان متقاطعان ب) مستقيمان متوازيان جـ) مستقيمان متخالفان د) ٣ نقط ليست على استقامة واحدة	
-23	إذا كان $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ ⊂ المستوى س ، $\overleftrightarrow{\text{جـ د}}$ ∩ س = φ فإن : أ) $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ // $\overleftrightarrow{\text{جـ د}}$ ب) $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{جـ د}}$ متخالفان جـ) $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ يقطع $\overleftrightarrow{\text{جـ د}}$ في نقطة د) $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ ∩ $\overleftrightarrow{\text{جـ د}}$ = φ 	
-24	أ ب جـ د هرم ثلاثي ، $\overline{\text{ب جـ}}$ ⊥ $\overline{\text{جـ د}}$ ، $\overline{\text{أ ب}}$ ⊥ $\overline{\text{ب جـ}}$ ، $\overline{\text{د أ}}$ ⊥ $\overline{\text{أ ب}}$ فإن : أ) $\overline{\text{أ د}}$ ⊥ المستوى أ ب جـ ب) $\overline{\text{أ د}}$ ⊥ $\overline{\text{أ ب}}$ جـ) $\overline{\text{أ ب}}$ ⊥ المستوى د ب جـ د) ليس أياً مما سبق 	

-25	(التمارين 25،26،27 من الشكل المقابل) أ ب جـ د ل هـ و ن متوازي مستطيلات فإن : $\overline{أ ب}$ ، $\overline{م و}$: أ) متقاطعان ب) متوازيان جـ) متخالفان د) كل منهم يعامد ب جـ 
-26	علاقة المستقيم $\overline{ل ن}$ بالمستوى ب هـ ل أ : أ) يوازيه ب) يقع فيه ب) يقطعه د) يخالفه
-27	مستقيمان متقاطعان ، يوازيان المستوى و ن د جـ: أ) $\overline{ب جـ}$ ، $\overline{ب هـ}$ ب) $\overline{أ د}$ ، $\overline{أ ل}$ ب) $\overline{أ ل}$ ، $\overline{أ ب}$ د) $\overline{ب هـ}$ ، $\overline{هـ و}$
-28	التمارين 28 ، 29 ، 30 تتبع الشكل المقابل : متوازي مستطيلات : المستوى ل د هـ ∩ المستوى و د ن = ..  أ) $\overline{أ د}$ ب) $\overline{د هـ}$ جـ) $\overline{د ن}$ د) $\overline{هـ جـ}$
-29	المستوى ل هـ و ن ∩ المستوى ل أ ب هـ ∩ المستوى ب هـ و جـ = ... أ) {هـ} ب) $\overline{ب هـ}$ جـ) $\overline{جـ و}$ د) {و}
-30	المستقيمان $\overline{ب جـ}$ ، $\overline{ل هـ}$: أ) متوازيان ب) متقاطعان جـ) متخالفان وغير متعامدان د) متخالفان ومتعامدا
-31	إحدى العبارات الآتية خاطئة : المستقيمان في المستوى ممكن أن يكونا ...... أ) غير متوازيان فيتقاطعان ب) غير متقاطعان فيتوازيان جـ) غير متقاطعان ، غير متوازيان د) ليس كل ما سبق

-32 المستقيمان ل$_1$ ، ل$_2$ متخالفان إذا كان

أ) ل$_1$ $\cap$ ل$_2$ = { أ }

ب) ل$_1$ $\cap$ ل$_2$ = ϕ ل$_1$ $\subset$ س ، ل$_2$ $\subset$ س

جـ) إذا كان المستقيم ل$_3$ عمودي على كل من ل$_1$ ، ل$_2$

د) ل$_1$ $\cap$ ل$_2$ = ϕ ، المستوى س يحوي ل$_1$ ، لا يحوي ل$_2$

-33 ٦ مستقيمات متلاقية في نقطة في الفضاء فإن عدد المستويات المتكونة يساوي :

أ) ٣٠ مستوى ب) ٢٠ مستوى جـ) ١٥ مستوى د) ١٠ مستوى

-34 المستقيمان في الفضاء ممكن يكونا :

أ) متوازيان ب) متقاطعان جـ) متخالفان د) كل ما سبق صحيح

-35 ثلاث مستقيمات متلاقية في نقطة في الفضاء فأي العبارات خطأ :

أ) لا يمكن قطعهم الثلاثة بمستقيم واحد . ب) يمكن قطعهم بمستقيم واحد .

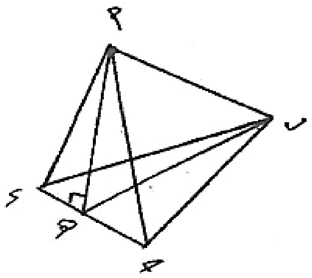
جـ) مقطعهم سطح مستوى لرؤوس مثلث . د) إذا قطعهم مستويان متوازيان ينتج مثلثان متشابهان

-36 أ ب جـ د هرم ثلاثي فيه $\overline{أب} \perp \overline{جـد}$

، $\overline{أهـ} \perp \overline{جـد}$ فيكون $\overline{جـد} \perp$ ......

أ) $\overline{بجـ}$ ب) $\overline{بهـ}$

جـ) $\overline{بد}$ د) $\overline{أد}$

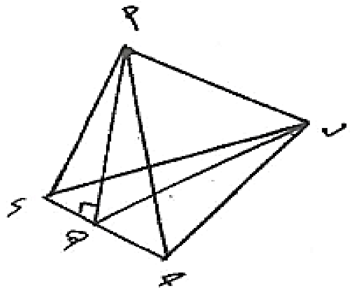


-37 أ ب جـ د هرم ثلاثي فيه $\overline{أب} \perp \overline{جـد}$

، $\overline{أهـ} \perp \overline{جـد}$ فيكون $\overline{جـد} \perp$ ......

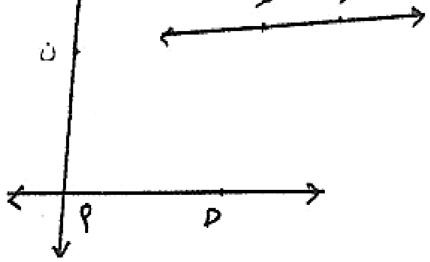
أ) $\overline{بجـ}$ ب) $\overline{بهـ}$

جـ) $\overline{بد}$ د) $\overline{أد}$



38

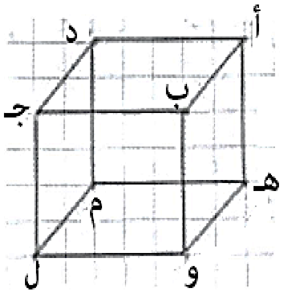
إذا كـــان أ ن ، د هـ متخالفـــان
وكان أ جـ // د هـ فإن الزاوية بين
أ ب ، د هـ هي :



أ) ب أ^ جـ   ب) د هـ^ ب
جـ) د هـ^ أ   د) الزاوية الناتجة عند تقاطع هـ د ، ب أ

39

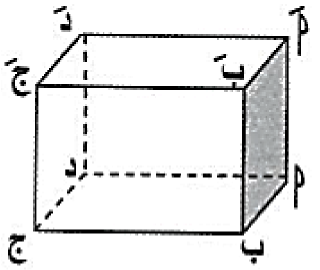
د جـ تخالف :



أ) ب جـ ، ب و ، هـ و ، و ل   ب) أ د ، ب و ، هـ م ، و ل
جـ) هـ و ، ب و ، هـ م ، و ل   د) أ هـ ، ب و ، هـ م ، و ل

40

في المكعب أ ب جـ د أَ بَ جـَ دَ ، العلاقة بين أ دَ
والمستوى ب جـ جـَ بَ :



أ) متخالفان   ب) متوازيان
ج) متقاطعان   د) متعامدان

-41

العبـــارات التاليـــة صـــحيحة عـــدا واحـــدة هـــي:

أ) إذا وازى مستقيم مستو فإنه يوازي كل مستقيم في المستوى
ب) إذا وازى مستقيمان مستقيماً ثالثاً فإنهما يكونان متوازيين
ج) إذا توازى مستويان فأي مستقيم في أحدهما يوازي المستوى الآخر
د) إذا وازى مستقيم كل مستويين متقاطعين فإنه يوازي خط تقاطعهما

-42

إذا كان $\overleftrightarrow{\text{أب}} \perp$ س ، $\overleftrightarrow{\text{جد}} // \overleftrightarrow{\text{أب}}$ فإن:

أ) $\overleftrightarrow{\text{جد}} \perp$ س   ب) $\overleftrightarrow{\text{جد}} //$ س   ج) $\overleftrightarrow{\text{جد}} \subseteq$ س   د) $\overleftrightarrow{\text{جد}} \cap$ س $= \emptyset$

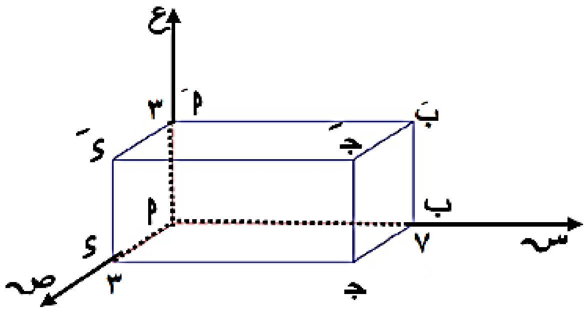
-43

لتحديـــــــــد المجســـــــم يلـــــزم:

أ) ٣ نقاط   ب) مستقيم ونقطة خارجه
ج) مستوى ونقطة خارجه   د) ٤ نقاط على استقامة واحدة

ثانياً : الاسئلة المقالية :

١) الشكل الذي أمامك يمثل منشورا رباعيا قائما ، اذكر ما يلي :



أ) مستويان متقاطعان

....

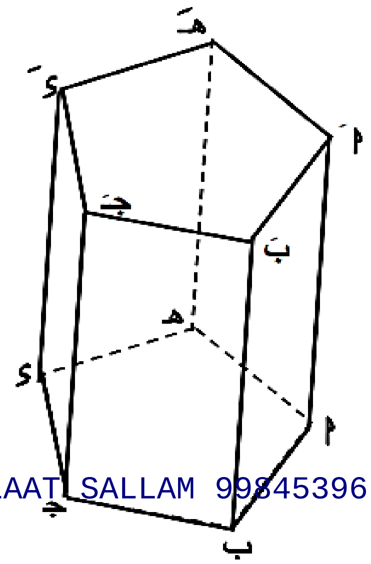
ب) مستقيمان متخالفان

....

جـ) احداثيات النقطة بَ

....

٢) الشكل الذي أمامك يمثل منشورًا خماسيًا قائمًا ، اوجد:



١) عدد المستويات بالشكل

....

أ) أ أَ بَ ب ∩ أ ب جـ د هـ

....

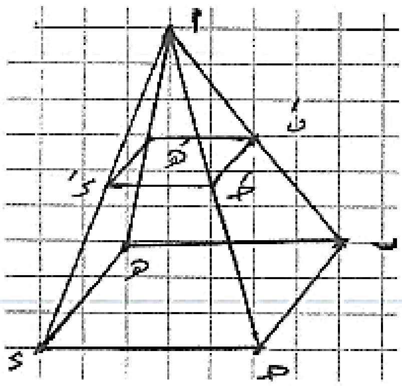
ب) مستقيمان متخالفان

....

جـ) مستقيمان متعامدان

....

٣) في الشكل المقابل أ ب جـ د هـ هرم رباعي قطع بمستوى يقطع الأحراف في بَ ، جـَ ، دَ ، هـَ أجب عما يلي :



(أ) أذكر ٣ أزواج مستقيمات متوازية .

(ب) أذكر ٢ زوج مستقيمات متخالفة .

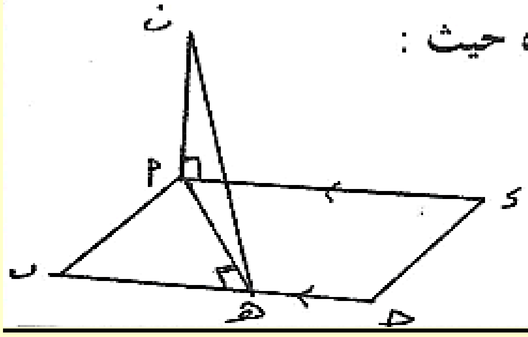
(جـ) اذكر جميع المستويات التي تشكل أوجه الشكل ب جـ د هـ بَ جـَ دَ هـَ .

(د) اذكر أزواج المستويات التي خطوط تقاطعها ب جـ ، جـ جـَ ، أ هـ

(هـ) ما علاقة ب جـ بالمستوى بَ جـَ دَ هـَ

٥) س ص ع مثلث قائم في ص . رسم س م ⊥ المثلث، ورسم س ل ⊥ ...

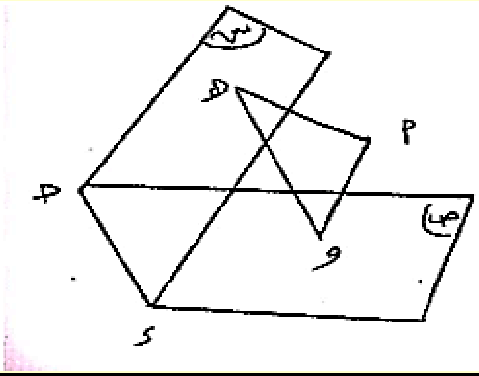
أثبت أن : س ل ⊥ المستوى م ص ع .



٦) أ ب جـ د متوازي أضلاع ، ن نقطة خارج مستواه حيث :

ن أ ⊥ أ د رسم أ هـ ⊥ ب جـ في النقطة هـ

أثبت أن ب جـ ⊥ المستوى ن أ هـ .



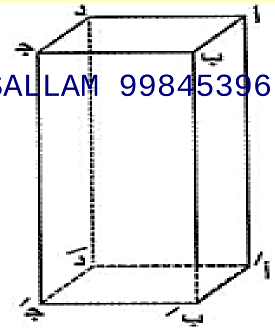
٧) س ، ص مستويان متقاطعان في جـ د ،

أ نقطة خارج المستويان ، رسم أ هـ ⊥ س ، أ و

Ⓐ أثبت أن : هـ و ⊥ جـ د

Ⓑ اكتب عدد المستويات التي تمر بـ أ توازي ص

Ⓒ اكتب عدد المستقيمات التي تمر بـ أ ، توازي س

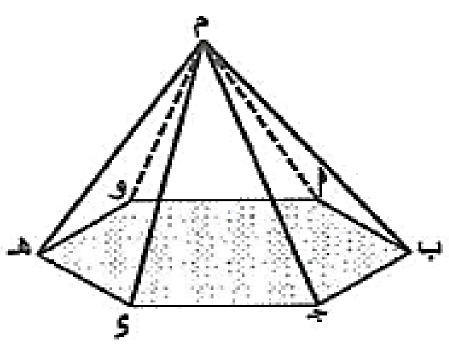


٩) الشكل المقابل يمثل منشورًا قائمًا منتظمًا، تأمل الشكل ثم أجب عما يلي:

أ) حدد زوجين من المستويات المتوازية.

ب) حدد مستقيمين يخالفان المستقيم أ د .

١٠) أثبت أنه إذا قطع مستوى مستويين متوازيين، فإن خطي تقاطعه معهما يكونان متوازيين.



١١) الشكل المقابل يمثل هرمًا سداسيًا قائمًا منتظمًا.

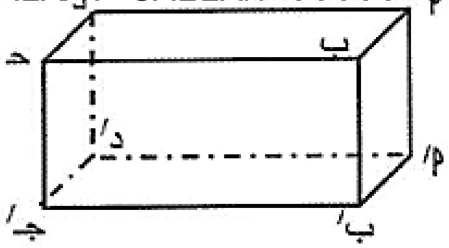
أ) سَمِّ ثلاثة مستقيمات تتلاقى في النقطة جـ.

ب) اذكر خط التقاطع بين المستوى م د هـ ، المستوى أ ب جـ د هـ و.

١٢) إذا كان الشكل المقابل يمثل شبه مكعب، أجب عما يلي:

أ) اذكر مستويين متقاطعين مع المستوى أ ب جـ د.

ب) اذكر مستقيمين يوازيان المستقيم د َ جـ َ ؟

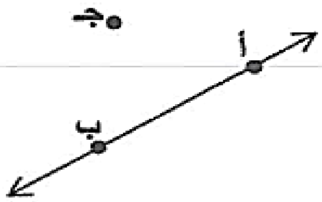


١٣) في الشكل المقابل أب مستقيم معلوم، جـ نقطة خارجة عنه. أجب عما يلي:

أ) كم عدد المستويات التي تمر بالمستقيم أب ، والنقطة جـ؟

ب) كم عدد المستويات التي تمر بالنقطتين ب ، جـ؟

ج) إذا رسم المستقيم أجـ ، فكم عدد المستويات التي يحددها أب ، أجـ؟



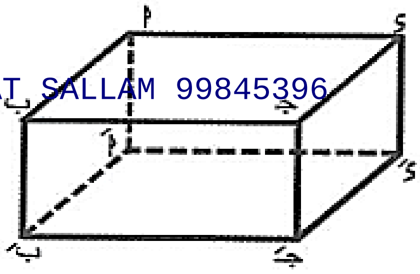
١٤) إذا كان المستقيم ل يوازي المستوى س ومر مستوى آخر مثل ص بالمستقيم ل ويقطع المستوى س في المستقيم م فاثبت أن ل // م .

١٦) من الشكل المقابل:

أ) سمِّ مستقيم يوازي ب ب َ .

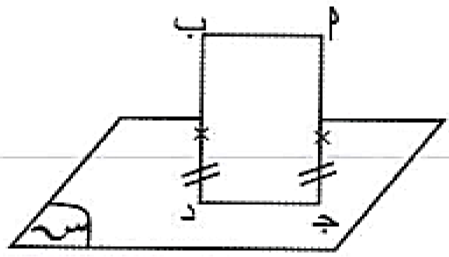
ب) سمِّ مستقيم يخالف ب َ جـ َ .

ج) سمِّ مستوى يتقاطع مع المستوى د د َ أ َ أ في د أ .



٢) في الشكل النقطتان جـ ، د ∈ إلى المستوى س، أجـ // بد ، أجـ = بد .

برهن أن أب // س.



١٧) أ ب جـ مثلث قائم الزاوية في ب، م أ ⊥ المستوى أ ب جـ، أد ⊥ م ب ، أد ∩ م ب = {د}.

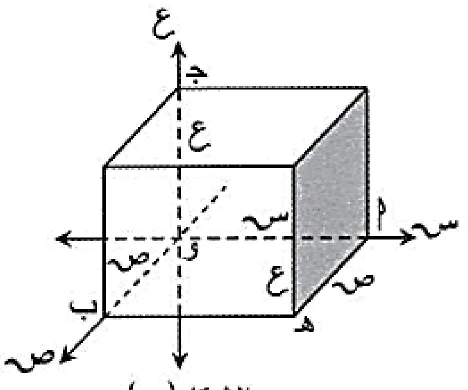
أثبت أن المستويين م أ ب ، م ب جـ متعامدان.

النظام الاحاتي في الفراغ (الاحداثيات ثلاثية الابعاد)

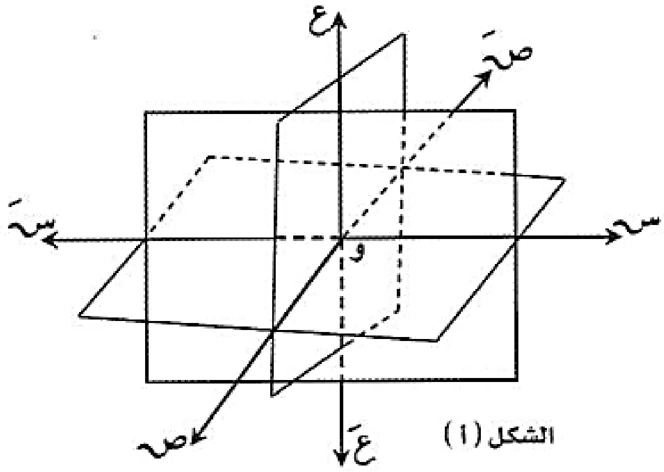
الإحداثيات المتعامدة في الفراغ : يبين الشكل التالي ثلاثة مستويات متعامدة مع بعضها . تسمى هذه المستويات (س ص ، س ع ، ص ع) المستويات الإحداثية وتسمى خطوط تقاطعها محاور الاحداثيات المحاور (س ، ص ، ع) وتسمى نقطتهم المشتركة نقطة الأصل . ونشير الى الاتجاه الموجب لكل محور برأس سهم .

ملاحظة: تدعى منظومة الإحداثيات المبينة في الشكل (أ) منظومة يسارية. إذا بادلنا بين المحورين سَ ، صَ ، تصبح منظومة يمينية.

تقسم المستويات الإحداثية الفراغ إلى ثماني مناطق تدعى الثُمنيّات يسمى الثماني بالحواف وسَ ، وصَ ، وعَ الثماني الأولى، أما الثمانيات الأخرى فليست مرقمة.



الشكل (ب)



الشكل (أ)

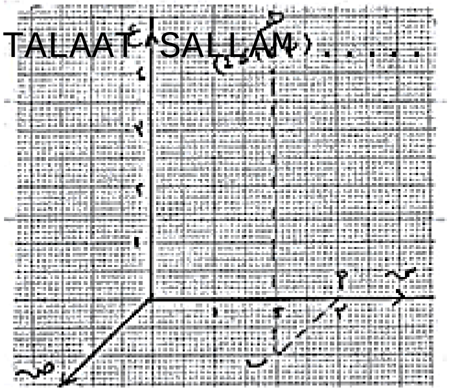
لتكن نقطة في الفراغ وليست في مستوٍ إحداثي. نمرر من مستويات موازية للمستويات الإحداثية تتقاطع مع المحاور الإحداثية في النقاط أ ، ب ، ج والتي تشكل متوازي السطوح مستطيل الشكل المبين في الشكل(ب) تسمى المسافات الموجهة س = وأ ، ص = وب ، ع = وج على التوالي، الإحداثي س ، والإحداثي ص ، والإحداثي ع لـ ونكتب (س ، ص ، ع) بما أن وب ≅ أهـ ، وجـ ≅ هـ ب فمن الأفضل استخدام الحواف الثلاث هـ ب ، أ هـ ، أ و

مثال: النقطة هـ (٣ ، ١ ، ٤) = (س ، ص ، ع)

الحل: **المسقط الأول :** س = ٣ هو بعد نقطة تقاطع المستوى الذي يحوي هـ مع المحور السيني عن نقطة الأصل .

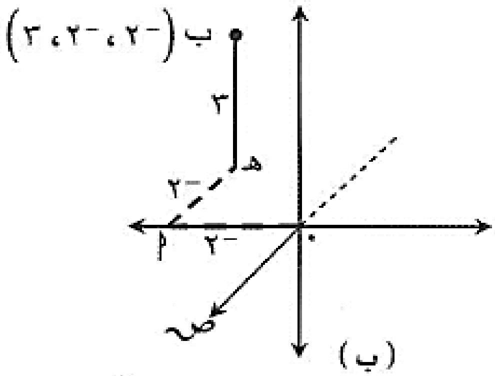
المسقط الثاني : ص = ١ هو بعد نقطة تقاطع المستوى الذي يحوي هـ مع المحور الصادي عن نقطة الأصل .

المسقط الثالث : ع = ٤ هو بعد نقطة تقاطع المستوى الذي يحوي هـ مع المحور ع عن نقطة الأصل .

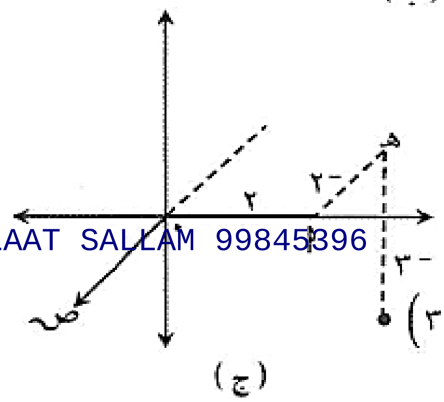


∴ لتعيين النقطة (٣ ، ١ ، ٤) في الفضاء .
نبدأ من الأصل ونسير في إتجاه س : ٣ وحدات
ونقف عند أ . ثم نسير في إتجاه يوازي ص: وحده
واحدة ونقف عند ب . ثم نسير في إتجاه ع : ٤ وحدات
فنصل الى هـ .

ب) نتحرك من نقطة الأصل بمقدار وحدتين نحو اليسار على المحور س إلى أ (−٢ ، ٠ ، ٠) ومن أ نتحرك بمقدار وحدتين إلى الخلف بالتوازي مع المحور ص إلى هـ (−٢ ، −٢ ، ٠) ومن هـ نتحرك ٣ وحدات من أعلى بالتوازي مع المحور ع إلى ب (−٢ ، −٢ ، ٣) كما في الشكل (ب).

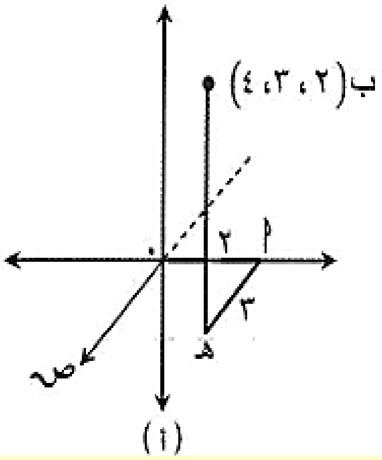


ج) من نقطة الأصل، نتحرك بمقدار وحدتين نحو اليمين على المحور س إلى أ (٢ ، ٠ ، ٠) ومن أ نتحرك وحدتين إلى الخلف بالتوازي مع المحور ص إلى هـ (٢ ، −٢ ، ٠) ومن هـ نتحرك ٣ وحدات إلى الأسفل بالتوازي مع المحور ع إلى ب (٢ ، −٢ ، −٣) كما في الشكل (ج).

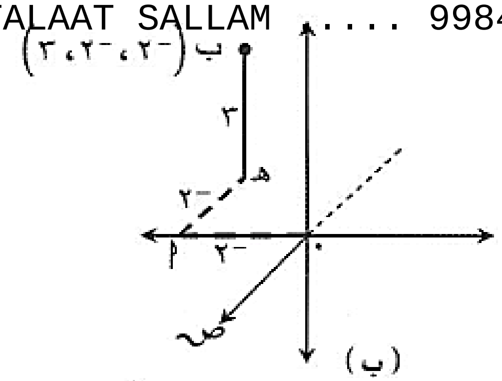


مثـــال : حدد النقاط: أ) (٢، ٣، ٤). ب) (−٢، −٢، ٣). ج) (٢، −٢، −٣).

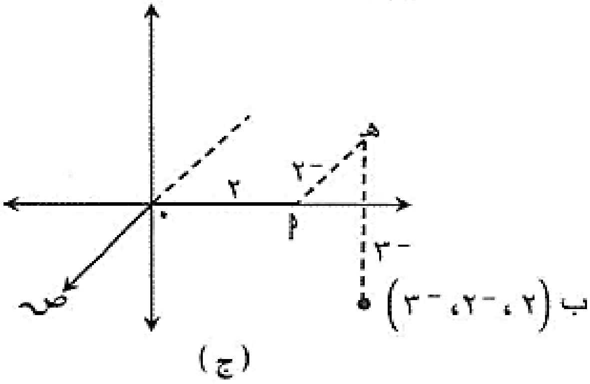
الحـــل :
أ) نتحرك بمقدار وحدتين إلى اليمين من المحور س إلى أ (٢ ، ٠ ، ٠) ونتحرك من أ ثلاث وحدات قدماً باتجاه موازٍ للمحور ص إلى هـ (٢ ، ٣ ، ٠) ومن هـ نتحرك ٤ وحدات إلى أعلى بالتوازي مع المحور ع إلى ب (٢ ، ٣ ، ٤) كما يبين الشكل (أ).



ب) نتحرك من نقطة الأصل بمقدار وحدتين نحو اليسار على المحور س إلى أ (-٢، ٠، ٠) ومن أ نتحرك بمقدار وحدتين إلى الخلف بالتوازي مع المحور ص إلى هـ (-٢، -٢، ٠) ومن هـ نتحرك ٣ وحدات من أعلى بالتوازي مع المحور ع إلى ب (-٢، -٢، ٣) كما في الشكل (ب).



ج) من نقطة الأصل، نتحرك بمقدار وحدتين نحو اليمين على المحور س إلى أ (٢، ٠، ٠) ومن أ نتحرك وحدتين إلى الخلف بالتوازي مع المحور ص إلى هـ (٢، -٢، ٠) ومن هـ نتحرك ٣ وحدات إلى الأسفل بالتوازي مع المحور ع إلى ب (٢، -٢، -٣) كما في الشكل (ج).

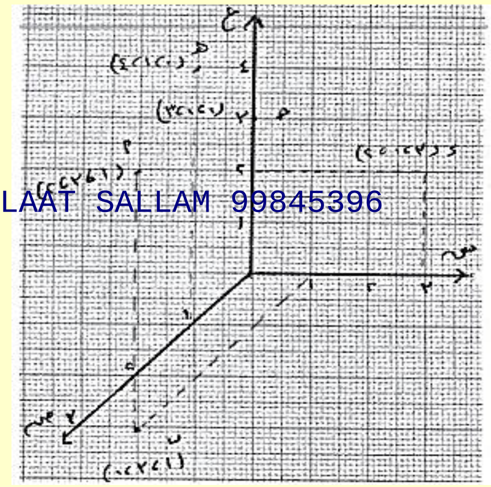


مثال : مثل النقاط التالية في نظام الأحداثيات ثلاثي الأبعاد :

الحل : أ- (١ ، ٣ ، ٢) ب- (١ ، ٣ ، ٠)

جـ - (٠ ، ٠ ، ٣) د- (٣ ، ٠ ، ٢)

هـ - (٠ ، ١ ، ٤)



ملاحظـات :

النقطة (أ ، ٠ ، ٠) تقع على المحور س .

النقطة (٠ ، ب ، ٠) تقع على المحور ص .

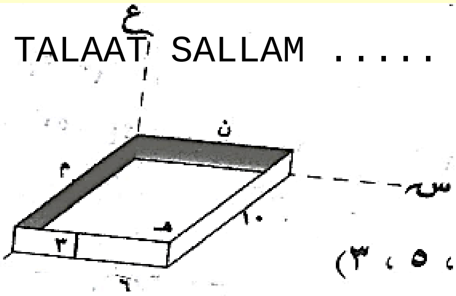
النقطة (٠ ، ٠ ، جـ) تقع على المحور ع .

النقطة (أ ، ب ، ٠) تقع في المستوى س ص .

النقطة (أ ، ٠ ، جـ) تقع في المستوى س ع .

النقطة (٠ ، ب ، جـ) تقع في المستوى ص ع .

مثـــال: إذا كانت أبعاد الصندوق في الشكل هي ٦، ١٠، ٣ فاكتب إحداثيات النقاط المشار إليها في الشكل المقابل (م ، ن ، هـ)

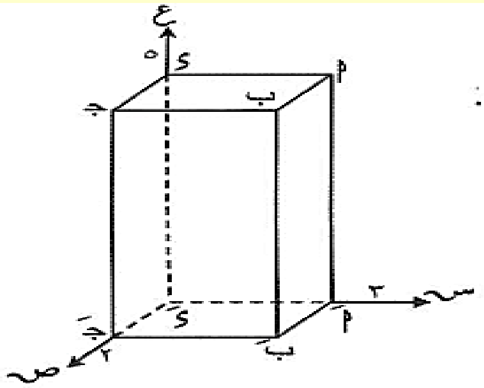


الحـــل: إحداثيات ن هي (٣ ، ٠ ، ٣) ، إحداثيات م هي (٠ ، ٥ ، ٣)

إحداثيات هـ هي (٦ ، ١٠ ، ٣)

تدريب:

بالاستعانة بالشكل المقابل: اكتب إحداثيات رؤوس شبه المكعب.



مثـــال: مثل النقطة ن (١ ، ٢ ، ٤) في نظام الإحداثيات.

الحـــل: ∵ الإحداثي السيني يساوي ١ .

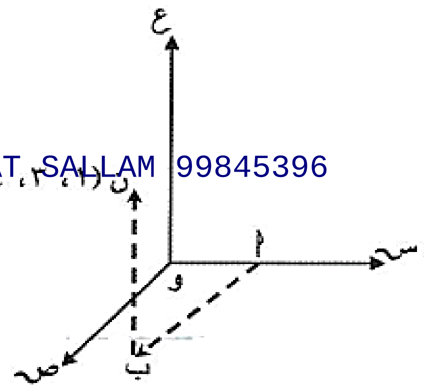
∴ نسير في اتجاه المحور س وحدة واحدة بدء من نقطة الأصل و (نقف عند النقطة أ).

∵ الإحداثي الصادي يساوي ٢ .

∴ نسير في اتجاه المحور ص ثلاث وحدات بدء من النقطة أ و (نقف عند النقطة ب).

∵ الإحداثي العيني يساوي ٤ .

∴ نسير في اتجاه المحور ع أربع وحدات بدء من النقطة ب و (نصل للنقطة ن).



ملاحظة: يمكن حل المثال بطريقة أخرى كالتالي:

أولاً: تمثيل النقطة (١ ، ٣) على المستوى س ، ص.

ثانياً: إقامة عمود من النقطة (١ ، ٣) طوله ٤ وحدات لتكون نهاية العمود هي النقطة ن(١ ، ٣ ، ٤).

مع ملاحظة أنه بالإمكان البدء بأي مستوى مثلاً:

أولاً تمثيل النقطة (٣ ، ٤) في المستوى ص ، ع ثم إقامة عمود على المستوى ص ، ع من النقطة (٣ ، ٤) طوله وحدة واحدة وتكون نهاية العمود هي النقطة ن(١ ، ٣ ، ٤).

المســافة بين نقطتين في الفضاء :

البعد بين النقطتين $ا(س_١ ، ص_١ ، ع_١)$ ، $ب(س_٢ ، ص_٢ ، ع_٢)$

يساوى $\sqrt{(س_٢ - س_١)^٢ + (ص_٢ - ص_١)^٢ + (ع_٢ - ع_١)^٢}$

احداثى نقطة المنتصف بين بين النقطتين $ا(س_١ ، ص_١ ، ع_١)$ ، $ب(س_٢ ، ص_٢ ، ع_٢)$

هو $\left(\frac{س_١ + س_٢}{٢} ، \frac{ص_١ + ص_٢}{٢} ، \frac{ع_١ + ع_٢}{٢}\right)$

– المسافة بين النقطة (س. ، ص. ، ع.) والمحور العيني تساوي المسافة بين النقطة (س. ، ص. ، ع.)

والنقطة (٠ ، ٠ ، ع.) وبتطبيق قانون البعد بين نقطتين = $\sqrt{س_.^٢ + ص_.^٢}$.

– المسافة بين (س. ، ص. ، ع.) والمحور السيني = $\sqrt{ص_.^٢ + ع_.^٢}$

– المسافة بين (س. ، س. ، ع.) والمحور الصادي = $\sqrt{س_.^٢ + ع_.^٢}$

مثـــــال : أ. احسب المسافة بين النقطتين $ب_١(-١ ، -٣ ، ٣)$ ، $ب_٢(٢ ، -٤ ، ١)$.

ب. احسب محيط مثلث رؤوسه هي: $ا(-٢ ، -٤ ، -٣)$ ، $ب(١ ، ٠ ، ٩)$ ، $ج(٢ ، ٠ ، ٩)$

MR:TALAAT SALLAM 99845396

الحـــــل : أ) $ب_١ب_٢ = \sqrt{(س_٢ - س_١)^٢ + (ص_٢ - ص_١)^٢ + (ع_٢ - ع_١)^٢}$

$= \sqrt{[٢ - (-١)]^٢ + [-٤ - (-٣)]^٢ + (١ - ٣)^٢} = \sqrt{١٤}$

ب) نحسب $ا ب = \sqrt{[١ - (-٢)]^٢ + [٠ - (-٤)]^٢ + [٩ - (-٣)]^٢} = ١٣$

، $ب ج = \sqrt{(٢ - ١)^٢ + (٠ - ٠)^٢ + (٩ - ٩)^٢} = ١$

و $ج ا = \sqrt{(-٢ - ٢)^٢ + (-٤ - ٠)^٢ + (-٣ - ٩)^٢} = ٤\sqrt{١١}$

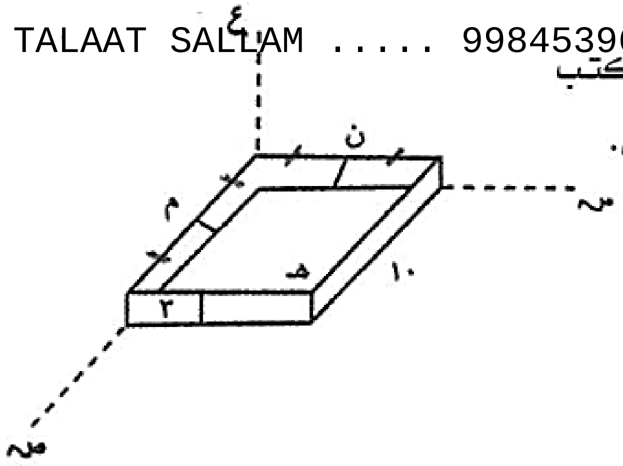
ونجد أن المحيط هو $١٣ + ١ + ٤\sqrt{١١} = ١٤ + ٤\sqrt{١١}$

تدريب :

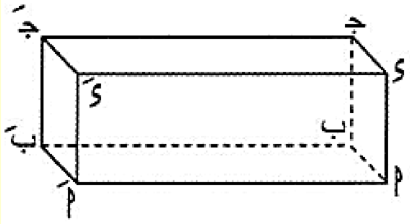
أثبت أن المثلث ا ب ج حيث $ا(٥ ، ٠ ، ٠)$ ، $ب(٠ ، ٤ ، ٠)$ ، $ج(٥ ، ٤ ، ٤)$ متطابق الضلعين.

إذا كانت أبعاد الصندوق في الشكل هي: ١٠، ٦، ٣ . فأكتب إحداثيات النقاط م، ن، هـ المشار إليها في الشكل المقابل.

ثم أوجـــد البعد بين ن ، هـ .



مثـــــال : أوجد طول كل من $\overline{أجـ}$ ، $\overline{جـ أ}$ في المنشور القائم أ ب جـ ء أَ بَ جَـ ءَ الذي أبعاده ١٢، ٤، ٣سم، علماً بأن قاعدته مستطيل، ثم أوجد مساحة المثلث أ أَ جـ .



الحـــــل : أ جـ = $\sqrt{٩+١٦}$ = ٥

جـ أَ = $\sqrt{٢٥+١٤٤}$ = ١٣

Δ أ أَ جـ قائم الزاوية في أ قاعدته= ٥، وارتفاعه = ١٢

المساحة = $\frac{١}{٢}$ × ١٢ × ٥ = ٣٠سم^{٢}

مثـــــال: $\overline{أ ب}$ قطر في دائرة مركزها م ، حيث ب = (−١ ، ٣ ، ٦) ، م = (٣ ، −٢ ، ٤)

أوجد إحداثيات أ .

الحـــــل: أ (س ، ص ، ع)

٣ = $\frac{س-١}{٢}$ ⇐ س − ١ = ٦ ⇐ س = ٧

، −٢ = $\frac{ص+٣}{٢}$ ⇐ ص + ٣ = −٤ ⇐ ص = −٤ − ٣ = −٧

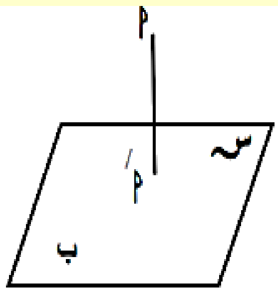
، ٤ = $\frac{ع+٦}{٢}$ ⇐ ع + ٦ = ٨ ⇐ ع = ٨− ٦ = ٢

∴ إحداثيات أ = (٧ ، −٧ ، ٢)

تدريب :

النقطة (٢ ، ك ، ٣) منتصف النقطتين (س ، −١ ، ٧) ، (٣ ، −٣ ، ص) أوجد (ك ، س ، ص)

الإســــقاط العمودى :



مسقط نقطة على مستو :

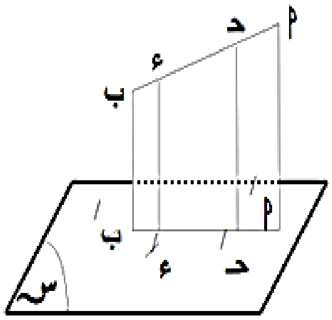
إذا كانت نقطة أ ∉ المستوى س و من أ رسمنا $\overline{أأ'}$ فإن :

أ' تسمى المسقط العمودى لنقطة أ على المستوى س

أما إذا كانت نقطة ب ∈ المستوى س فإن :

مسقط النقطة ب هو نفسها

** المسقط العمودى لنقطة معلومة على مستو معلوم هو النقطة التى هى موقع القطعة المستقيمة العمودية المرسومة من النقطة المعلومة على المستوى



مسقط قطعة مستقيمة على مستو :

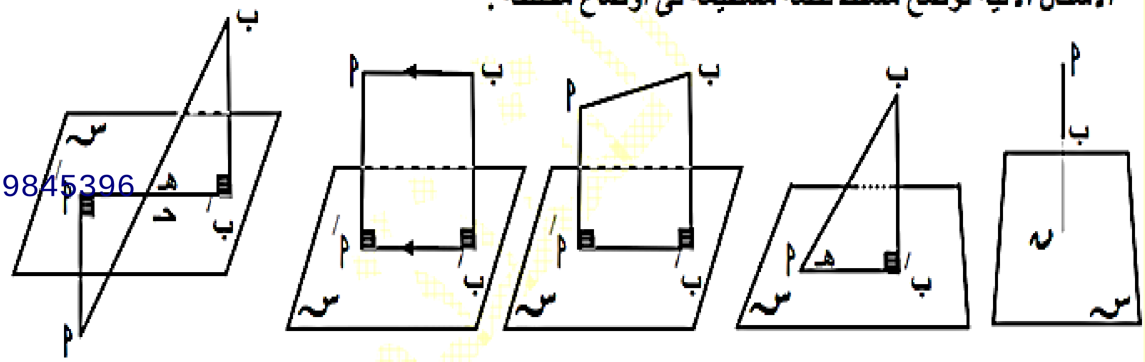
مسقط $\overline{أب}$ على المستوى س هو $\overline{أ'ب'}$

حيث : أ' مسقط أ ، ب' مسقط ب على المستوى س

أى نقطة تنتمى إلى $\overline{أب}$ يكون مسقطها على المستوى س

نقطة تنتمى إلى $\overline{أ'ب'}$

الأشكال الآتية توضح مسقط قطعة مستقيمة فى أوضاع مختلفة :



** مسقط مستقيم على مستو هو مستقيم " إرسم شكل يوضح مسقط $\overleftrightarrow{أب}$ على مستوى س "

** المستوى س يسمى مستوى المسقط بينما المستوى الذى يتكون منه أ ب و مسقطه يسمى مستوى الإسقاط

** زاوية ميل مستقيم على مستو هى الزاوية بين هذا المستقيم و مسقطه على المستوى

** الزاوية بين قطعة مستقيمة و مستو هى الزاوية بين القطعة المستقيمة ومسقطها على المستوى

" هى الزاوية بين المستقيم الحامل للقطعة المستقيمة و المستوى "

** إذا كان قياس الزاوية بين القطعة المستقيمة و المستوى هو (هـ) فإن : ٠° ≤ هـ ≤ ٩٠°

** طول مسقط القطعة المستقيمة على مستو = طول القطعة المستقيمة × جيب تمام زاوية ميل المستقيم الحامل لها على المستوى

فى الشكل الثانى : أ' ب' = أ ب حتا هـ

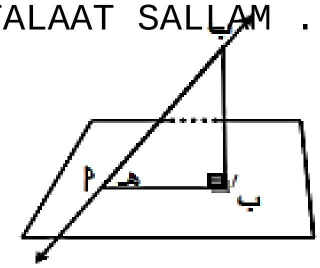
** إذا كانت القطعة المستقيمة عمودية على المستوى فإن مقطعها على المستوى نقطة ، و طولها = صفر كما فى الشكل الأول

** إذا كانت القطعة المستقيمة توازى المستوى فإن طولها = طول مسقطها على المستوى كما فى الشكل الرابع

الزاوية بين مستقيم و مستو :

* زاوية ميل مستقيم على مستو هى الزاوية بين هذا المستقيم و مسقطه على المستوى
* الزاوية بين قطعة مستقيمة و مستو هى الزاوية بين القطعة المستقيمة ومسقطها على المستوى

" هى الزاوية بين المستقيم الحامل للقطعة المستقيمة و المستوى "

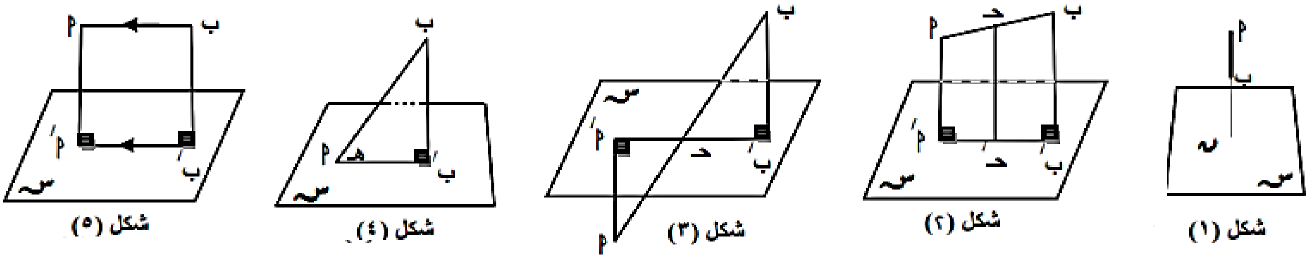


فى الشكل المقابل :

∠ هـ هي زاوية ميل أب على س ، و يكون : أ بَ = أ ب حتا هـ

حيث : ٠ ≤ هـ ≤ ٩٠°

ملاحظات :



* فى شكل (١) : أب ⊥ س لذا ينطبق مسقط أ على مسقط ب و يكون :

ق (∠ هـ) = ٩٠° ، أَ بَ = صفراً

* فى شكل (٢) : إذا كانت حـ ∈ أب فإن : مسقطها على س حـَ ∈ أَ بَ

و يكون : أَ بَ < أ ب

* فى شكل (٣) : أب تشترك مع س فى حـ فيكون : أَ حـ < أ حـ ، حـ بَ < حـ ب

و بالجمع ينتج : أَ بَ < أ ب

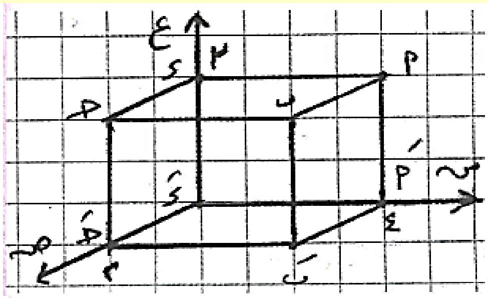
* فى شكل (٤) : أب تشترك مع س فى أ فتكون : أ بَ مسقط أب على س

و يكون : أ بَ < أ ب

* فى شكل (٥) : أب // س و يكون : ق (∠ هـ) = ٠° أَ بَ = أ ب

و يكون : الشكل أ أَ بَ ب مستطيل

* و على ذلك : أَ بَ ≤ أ ب



مثـــال : أ ب جـ د أ/ ب/ جـ/ د/ متوازي مستطيلات فإن :

1. مسقط د على المستوى س ص هو .....
2. مسقط أ د على ص ع هو ....
3. مسقط أ ب على المستوى س ص هو .....
4. مسقط ب على المستوى ص ع هو ....
5. طول مسقط أ د على س ع يساوي ....
6. مسقط ب جـ/ على س ص هو ....

الحـــــل :

① (د/) ② (د)

③ ($\overline{\text{أ/ ب/}}$) ④ (جـ)

⑤ (٤) ⑥ ($\overline{\text{ب/ جـ/}}$)

تدريب :

من الرسم أ ب جـ د هـ و ل ن متوازي مستطيلات أبعاده ٤ ، ٢ ، ٣ .

المطلوب :

① إحداثيات و

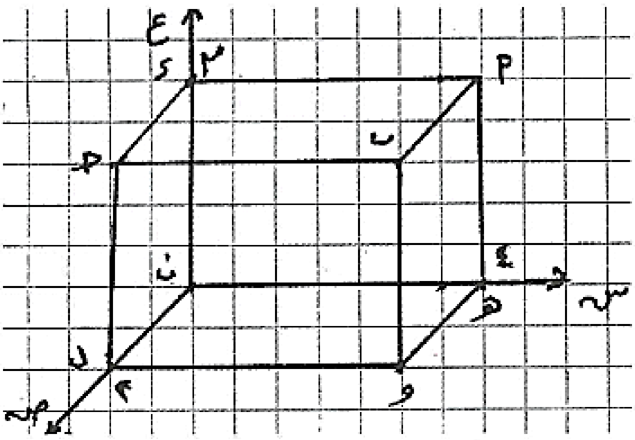
② إحداثيات أ

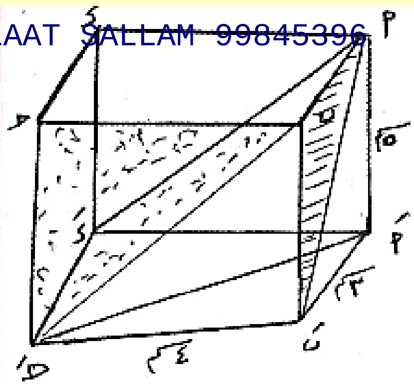
③ إحداثيات مسقط ب على المستوى س ص

④ إحداثيات مسقط هـ على المستوى س ع .

⑤ إحداثيات مسقط ب على المستوى س ع .

⑥ إحداثيات مسقط ب على المستوى ص ع .





مثـــــال : أ ب جـ د أ/ ب/ جـ/ د/ متوازي مستطيلات أوجد طول :

① مسقط $\overline{\text{أ د/}}$ على المستوى ب جـ جـ/

② مسقط $\overline{\text{أ/ جـ}}$ على المستوى أ ب ب/

الحـــــل :

(١) بالنسبة لــ $\overline{\text{أ د/}}$: مسقط أ هو ب

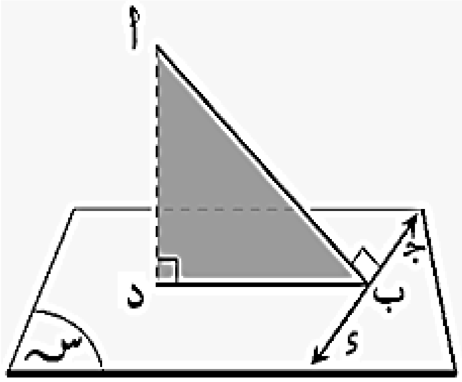
مسقط د/ هو جـ/

∴ مسقط $\overline{\text{أ د/}}$ هو $\overline{\text{ب جـ/}}$ ∴ ب جـ/ = $\sqrt{١٦+٢٥}$ = $\sqrt{٤١}$

(٢) أ/ جـ/ : مسقط أ/ هو أ/ ، مسقط جـ/ هو ب/

∴ مسقط $\overline{\text{أ/ جـ/}}$ على المستوى أ ب ب/ هو $\overline{\text{أ/ ب/}}$ ∴ أ/ ب/ = ٣ سم

نظـــرية ٤ :



«إذا رُسم مستقيمٌ مائل على مستوى وكان عموديًا على مستقيم في المستوى فإن مسقط المستقيم المائل على المستوى يكون عموديًا على هذا المستقيم».

المعطيات: $\overleftrightarrow{\text{ب جـ}}$ مستقيم في المستوى س ، $\overline{\text{أ ب}}$ مائل ⊥ $\overline{\text{ب جـ}}$ ، $\overline{\text{أ د}}$ ⊥ المستوى

المطلوب: إثبات أن $\overline{\text{ب د}}$ (مسقط المائل) ⊥ $\overline{\text{ب جـ}}$

البرهـان: ∵ $\overline{\text{أ د}}$ ⊥ المستوى س (دائماً نبدأ بالعمود على المستوى)

∴ $\overline{\text{أ د}}$ ⊥ $\overline{\text{ب جـ}}$

أصبح $\overline{\text{ب جـ}}$ ⊥ $\overline{\text{أ د}}$ ، $\overline{\text{أ ب}}$

∴ $\overline{\text{ب جـ}}$ ⊥ المستوى أ ب د

∴ $\overline{\text{ب جـ}}$ ⊥ $\overline{\text{ب د}}$

∴ $\boxed{\text{المائل عمود} \Leftarrow \text{المسقط عمود}}$

عكس نظرية (٤):

«إذا رُسم مستقيمٌ مائلٌ على مستوى وكان مسقطه على المستوى عموديًا على مستقيم فيه فإن ذلك المستقيم المائل يكون عموديًا على هذا المستقيم».

عمود $\overline{\text{أ د}}$ ، مائل $\overline{\text{أ ب}}$ ، مسقط $\overline{\text{ب د}}$

∵ $\overline{\text{ب د}}$ ⊥ $\overline{\text{ب جـ}}$ (المسقط عمود)

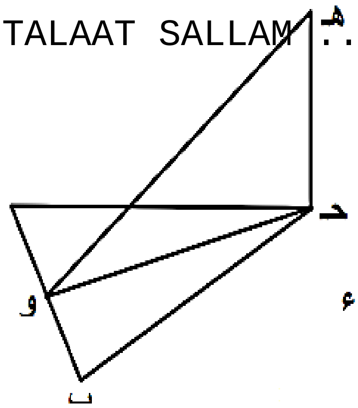
∴ $\overline{\text{أ ب}}$ ⊥ $\overline{\text{ب جـ}}$ (المائل عمود)

- مما سبق يتبين أنه إذا وُجد في تمرينٍ ما مستقيمٌ مائلٌ على مستوى ومسقطه في المستوى، وكـان أحدهما عموديًا على مستقيم في المستوى، كان الآخر عموديًا على نفس المستقيم.

مثـــال : في الشكل المقابل :

$\overleftrightarrow{\text{حـ هـ}}$ ⊥ المستوى ب حـ ء ، حـ هـ = ١٢ سم ، ب حـ = ٢٠ سم ، $\overleftrightarrow{\text{هـ و}}$ ⊥ $\overleftrightarrow{\text{ب ء}}$

، حا (∠ حـ ب و) = $\frac{٤}{٥}$ أوجد طول هـ و



البرهان ∵ حـ هـ ⊥ المستوى ب حـ ء

∴ هـ و مائل على المستوى ب حـ ء

، ∵ هـ و ⊥ ب ء

∴ حـ و هو مسقط هـ و على المستوى ي حـ ء

∴ حـ و ⊥ ب ء

∴ ق (∠ ب و حـ) = ٩٠°

∴ في Δ ب حـ و :

حـ و = ب حـ × حا (∠ حـ ب و)

= ٢٠ × $\frac{٤}{٥}$ = ١٦ سم

، ∵ حـ هـ ⊥ المستوى ب حـ ء

∴ حـ هـ ⊥ حـ و

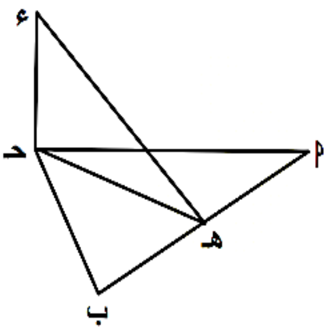
∴ في Δ هـ حـ و :

هـ و = ٢٠ سم " فيثاغورث "

مثـــال : في الشكل المقابل :

حـ ء ⊥ المستوى ا ب حـ ، ق (∠ حـ ا ب) = ٣٠° ، حـ هـ ⊥ ا ب ، حـ ء = $\frac{١}{٢}$ ا حـ

أوجد ق (∠ هـ ء حـ)



الحـــل :

∵ حـ ء ⊥ المستوى ا ب حـ

∴ ء هـ مائل على المستوى ا ب حـ ، مسقطه هو حـ هـ

، ∵ حـ هـ ⊥ ا ب

∴ ء هـ ⊥ ا ب

في Δ ا ب حـ :

ق (∠ حـ ا ب) = ٣٠° ، ق (∠ ا هـ حـ) = ٩٠°

∴ حـ هـ = $\frac{١}{٢}$ ا حـ

، ∵ حـ ء = $\frac{١}{٢}$ ا حـ

∴ حـ هـ = حـ ء

، ∵ ق (∠ ء حـ هـ) = ٩٠°

∴ ق (∠ هـ ء حـ) = ٤٥°

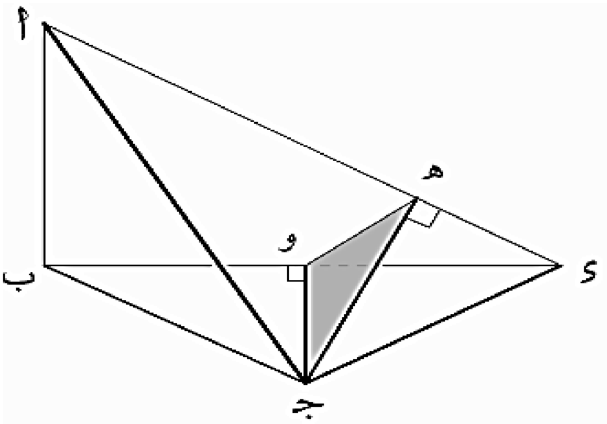
مثـــال :

في الشكل المقابل: أ ب جـ د هرم ثلاثي فيه:

أب ⊥ المستوى ب جـ د ، رُسم جـ و ⊥ ب د ، جـ هـ ⊥ أ د ، أثبت أن:

أولاً: جـ و ⊥ المستوى أ ب د

ثانيًا: و هـ ⊥ أ د



الحـــل :

∵ أ ب ⊥ المستوى ب جـ د ∴ أ ب ⊥ جـ و

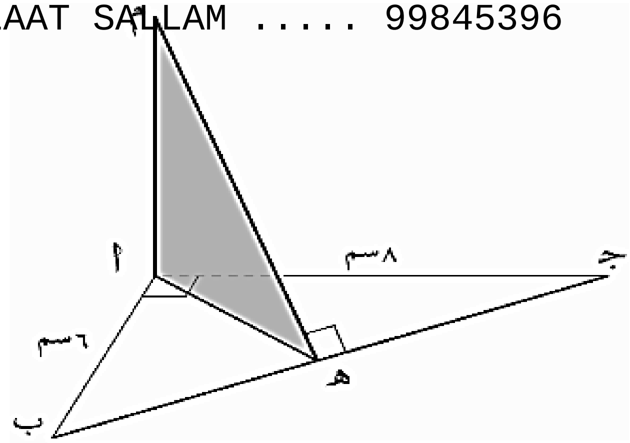
∵ ب د ⊥ جـ و ∴ جـ و ⊥ المستوى أ ب د #أولاً

∴ جـ هـ مائل على المستوى أ ب د ، مسقطه و هـ

∵ جـ هـ ⊥ أ د ∴ و هـ ⊥ أ د #ثانيًا

مثـــــال :

في الشكل المقابل: أ ب جـ قائم الزاوية عند أ، رُســم $\overline{أم}$ ⊥ المـستوى أ ب جـ، أم = ٣,٦ سم، $\overline{مهـ}$ ⊥ $\overline{ب جـ}$، فــإذا كـــان أ ب = ٦ سم، أ جـ = ٨ سم، احسب طول $\overline{أهـ}$، $\overline{مهـ}$.



الحـــل :

∵ $\overline{مهـ}$ مائل على المستوى أ ب جـ، $\overline{مهـ}$ ⊥ $\overline{ب جـ}$ ∴ مسقطه ⊥ $\overline{ب جـ}$

∵ أ ب جـ قائم الزاوية عند أ، وباستخدام نظرية فيثاغورث ينتج أن:

(ب جـ)^2 = ∴ ب جـ = سم

ومن نظرية إقليدس ينتج أن: أ هـ = $\frac{\times}{}$ = $\frac{\times}{}$ = ٤,٨ سم

△ م أ هـ قائم الزاوية عند أ لأن

∴ (م هـ)^2 =

أكمل الحل كتدريب

مثـــــال :

م أ ب جـ هرم ثلاثي، $\overline{م أ}$ ، $\overline{م ب}$، $\overline{م جـ}$ متعامدة مثنى مثنى، رُسم $\overline{أ ى}$ ⊥ $\overline{ب جـ}$ يقطعه في ى، $\overline{م هـ}$ ⊥ $\overline{أ ى}$ يقطعه في هـ، أثبت أن:

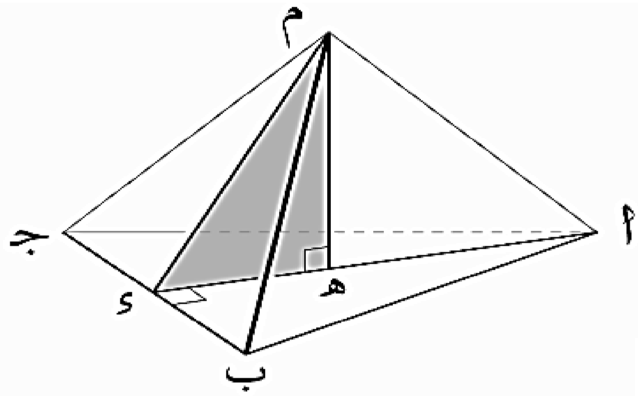
أولاً: $\overline{م أ}$ ⊥ المستوى م ب جـ.

ثانيًا: $\overline{م هـ}$ ⊥ المستوى أ ب جـ.

ثالثًا: $\overline{م ى}$ ⊥ $\overline{ب جـ}$.

رابعًا: (م هـ)^2 = أ هـ · هـ ى.

الحـــل :



∵ $\overline{م أ}$ ⊥ كل من $\overline{م ب}$ ، $\overline{م جـ}$

∴ $\overline{م أ}$ ⊥ المستوى م ب جـ # أولاً

∴ $\overline{م أ}$ ⊥ $\overline{ب جـ}$، ∵ $\overline{أ ى}$ ⊥ $\overline{ب جـ}$

∴ $\overline{ب جـ}$ ⊥ المستوى

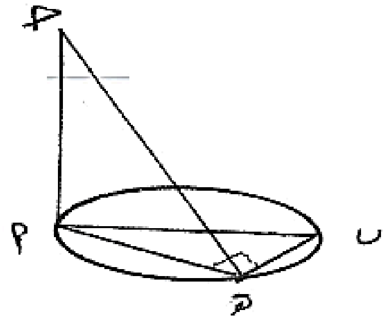
∴ $\overline{ب جـ}$ ⊥ $\overline{م هـ}$، ∵ $\overline{م هـ}$ ⊥ $\overline{أ ى}$

∴ $\overline{م هـ}$ ⊥ المستوى أ ب جـ # ثانيًا

∴ $\overline{م ى}$ مائل على المستوى أ ب جـ ، مسقطه $\overline{أ ى}$ ⊥ $\overline{ب جـ}$ ، ∴ $\overline{م ى}$ ⊥ $\overline{ب جـ}$. # ثالثًا

مثـــــال : $\overline{أب}$ قطر في دائرة ، رسم من أ العمود $\overline{أجـ}$ على مستوى الدائرة ، هـ محيط الدائرة

أثبت أن $\overline{جـهـ} \perp \overline{هـب}$



الحـــــل :

∵ $\overline{أب}$ قطر   ق أ هـ ب = ٩٠°

∴ $\overline{أهـ} \perp \overline{أب}$

∴ عمود ⇐ مائل ⇐ مسقط

$\overline{جـأ}$ (عمود) ← $\overline{جـهـ}$ مائل ← $\overline{أهـ}$ (مسقط)

∵ $\overline{أهـ} \perp \overline{بهـ}$ (المسقط عمود)

∴ $\overline{جـهـ} \perp \overline{بهـ}$ (المائل عمود)

ملاحظة :

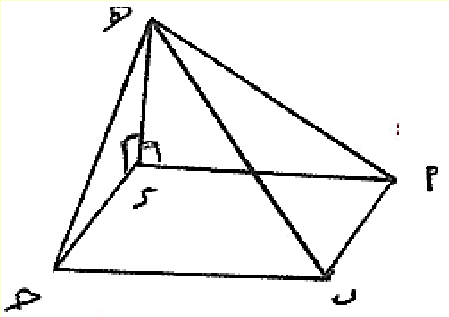
$\overline{جـأ}$ ← $\overline{جـهـ}$ ← $\overline{أهـ}$

عمود   مائل   مسقط

احذف جـ تجد المسقط $\overline{أهـ}$

مثـــــال : أ ب جـ د مستطيل أقيم $\overline{دهـ} \perp$ مستوى المستطيل **أثبت أن :**

المثلثان أ ب هـ ، جـ ب هـ قائما الزاوية .



الإثبات :

$\overline{هـد}$ عمود على المستقيم ⇐ $\overline{هـأ}$ مائل ⇐ $\overline{أد}$ مسقط

∵ $\overline{دأ} \perp \overline{أب}$ (المسقط عمود) (زاوية المستطيل القائمة)

∴ $\overline{هـأ} \perp \overline{أب}$ (المائل عمود)

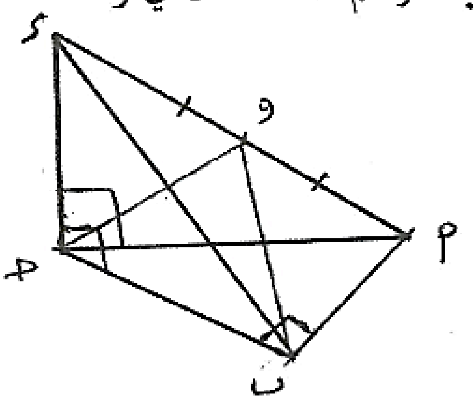
∴ △ هـ أ ب قائم في أ .

بالمثل ، ∵ $\overline{هـد}$ عمود ⇐ $\overline{هـجـ}$ مائل ⇐ مسقطه $\overline{جـد}$

احذف هـ رأس العمودي

تجد المسقط $\overline{جـد}$

تدريب : △ أ ب جـ قائم في ب ، رسم $\overline{جـد} \perp$ المستوى أ ب جـ ، رسم $\overline{أد}$ ، نصف في و



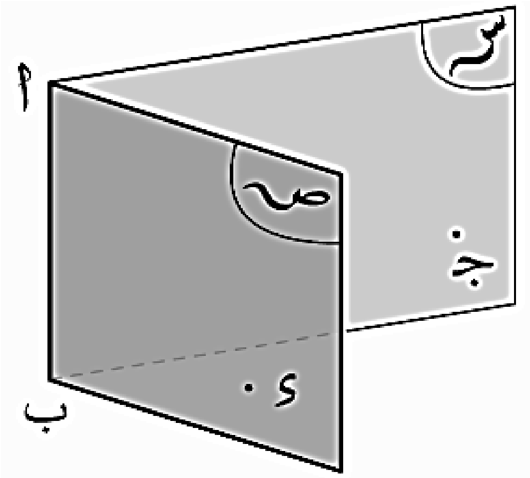
أثبت أن :

① $\overline{أب} \perp$ المستوى ب جـ د

② و ب = و جـ

الزاوية الزوجية بين المستويين:

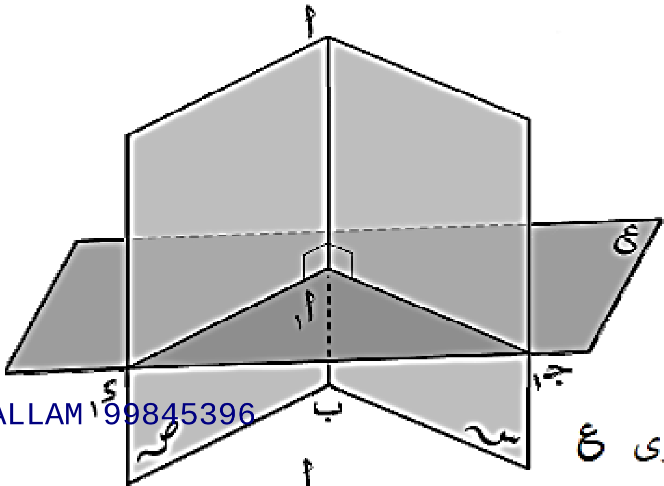
(١) تعريف:



هي اتحاد نصفي مستويين لهما حدٌّ مشترك.

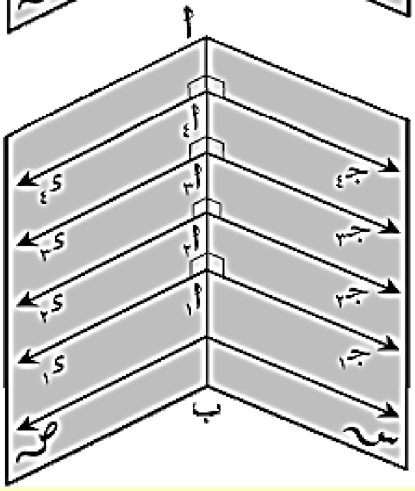
في الشكل المقابل لنصفي المستويين س، ص حدٌّ مشترك هو $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ ، لذلك يُسمّى: س ∪ $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ ∪ ص زاوية زوجية، ويرمز لها بالرمز: ∠ (س − $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ − ص) أو بالرمز: ∠ (جـ − $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ − ء)، ويعني الزاوية الزوجية التي أحد وجهيها يمر بالنقطة جـ ووجهها الآخر يمر بالنقطة ء وحدُّها $\overleftrightarrow{\text{أب}}$.

(٢) الزاوية المستوية للزاوية الزوجية:



هي الزاوية التي تنشأ من تقاطع الزاوية الزوجية مع أي مستوى عمودي على حرفها (حدّها).

والشكلان المقابلان يوضحان المستوى ع العمودي على حدّ الزاوية الزوجية $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ ∠ (س − $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ − ص) فقطعها في $\widehat{\text{جـ}_1\text{أ}_1\text{ء}_1}$، لذلك تُسمّي $\widehat{\text{جـ}_1\text{أ}_1\text{ء}_1}$ زاوية مستوية للزاوية الزوجية ∠ (س − $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ − ص)، وكذلك كل من الزوايا $\widehat{\text{جـ}_2\text{أ}_2\text{ء}_2}$ ، $\widehat{\text{جـ}_3\text{أ}_3\text{ء}_3}$ ، $\widehat{\text{جـ}_4\text{أ}_4\text{ء}_4}$.



● **لاحظ أن:**

١ − كلاً من ضلعي الزاوية المستوية للزاوية الزوجية يكون عموديًا على حرفها (حدّها).

٢ − يوجد لكل زاوية زوجية عدد لانهائي من الزوايا المستوية.

(٣) حقيقة:

جميع الزوايا المستوية للزاوية الزوجية تكون متساوية في القياس.

(٤) تعريف:

قياس الزاوية الزوجية هو قياس أيٍّ من زواياها المستوية.

● **ملاحظات:**

١ – الزاوية الزوجية القائمة هي زاوية زوجية قياسها ٩٠°.

٢ – كل من المائل ومسقطه في المستوى يكونان زاوية مستوية للزاوية الزوجية حرفها المستقيم الثالث العمودي عليهما ووجهيها يحويانها.

تعريف أخر للزاوية الزوجية :

هي الزاوية التي تنشأ عن تقاطع مستوى عمودي على الحرف المشترك مع الزاوية الزوجية

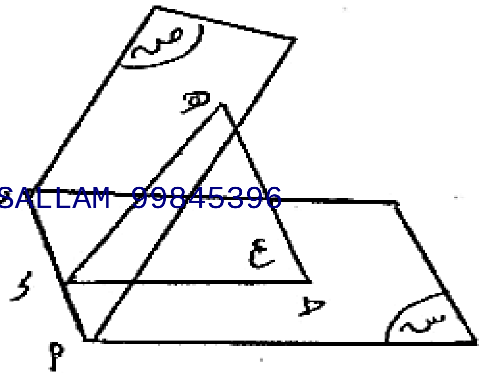
المستوى ع عمودي على $\overleftrightarrow{أ ب}$ ، يقطع المستويين

س ، ص في $\overline{جـ د}$ ، $\overline{هـ د}$ حيث $\overline{جـ د} \perp \overline{أ ب}$ ،

$\overline{هـ د} \perp \overline{أ ب}$.

∴ $\overline{جـ د}$ ، $\overline{هـ د}$ يحصران الزاوية المستوية للزاوية

الزوجية (جـ ، $\overleftrightarrow{أ ب}$ ، د) .



لاحظ !: $\overline{جـ د}$ في س ، عمودى على $\overline{أ ب}$ (خط التقاطع) ، $\overline{هـ د}$ في ص، عمودي على $\overline{أ ب}$ خط التقاطع

بكده نقول $\overline{جـ د}$ ، $\overline{هـ د}$ يحصران الزوجية

غالباً : يكون أحدهم مائل ، الثاني مسقطه وكل منهم عمودى على الحرف المشترك .

– يوجد عدد لا نهائي من الزوايا المستوية للزاوية الزوجية .

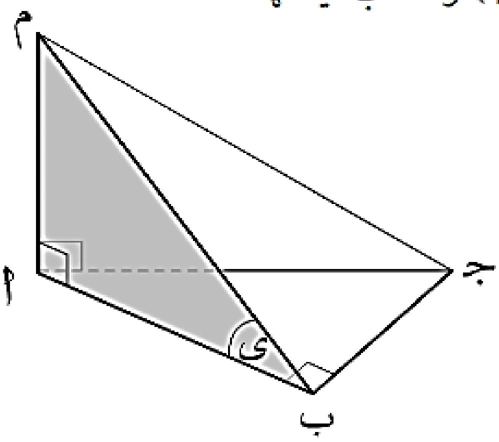
– جميع الزوايا المستوية للزاوية الزوجية متساوية في القياس .

قياس الزاوية الزوجية :

هو قياس أي زاوية من زواياها المستوية .

إذا كان قياس الزاوية الزوجية بين مستويين ٩٠° فإن المستويان يكونا متعامدان .

مثـــال : أ ب جـ مثلث قائم الزاوية عند ب، $\overline{م أ}$ ⊥ المستوى أ ب جـ، فإذا كان م ب = ٢ م أ أوجد زاوية مستوية للزاوية الزوجية ∠ (م – $\overleftrightarrow{ب جـ}$ – أ) واحسب قياسها.



الحـــــل :

∵ $\overline{م أ}$ ⊥ المستوى أ ب جـ ∴ $\overleftrightarrow{م ب}$ مائل

على نفس المستوى ومسقطه أ ب ⊥ $\overleftrightarrow{ب جـ}$

∴ $\overleftrightarrow{م ب}$ ⊥ $\overleftrightarrow{ب جـ}$ ∴ ى هي الزاوية

المستوية للزاوية الزوجية ∠ (م – $\overleftrightarrow{ب جـ}$ – أ)

في المثلث م أ ب القائم عند أ

جاى = $\frac{م أ}{أ ب}$ = $\frac{١}{٢}$ ∴ ى = ٣٠°

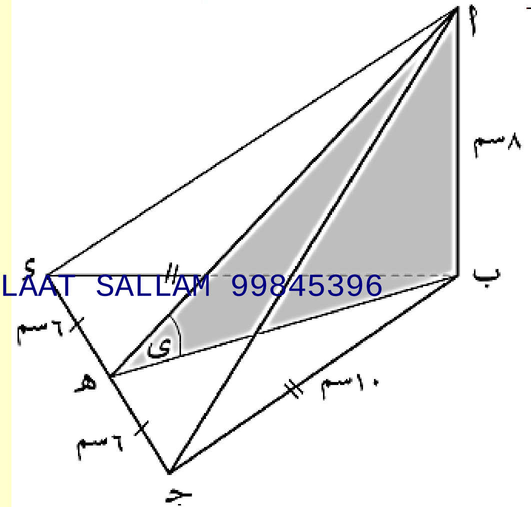
∴ ق[∠ (م – $\overleftrightarrow{ب جـ}$ – أ)] = ٣٠°

أ ب جـ ى هـرم ثلاثـي فيـه $\overline{أ ب}$ ⊥ المـستوى ب جـ ى، هـ منتـصف $\overline{جـ ى}$، فـإذا كـان أ ب = ٨سم، ب جـ = ب ى = ١٠سم، جـ ى = ١٢سم،

أوجد:

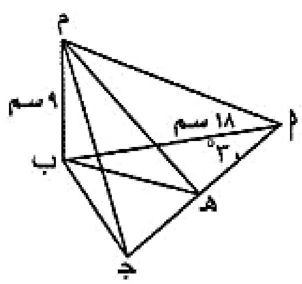
أولاً: طول $\overline{ب هـ}$.

ثانيًا: ق[∠ (أ – $\overleftrightarrow{جـ ى}$ – ب)]



مثـــال : أ ب جـ مثلـث فيـه ق(أ) = ٣٠°، أ ب = ١٨ سـم، رسـم $\overline{ب م}$ ⊥ المســتوى أ ب جـ بحيـث ب م = ٩ سـم ثم رسمت $\overline{ب هـ}$ ⊥ $\overline{أ جـ}$ فقابلته في هـ أثبت أن: $\overline{م هـ}$ ⊥ $\overline{أ جـ}$ ثم أوجد قياس الزاوية م – $\overline{أ جـ}$ – ب.

الحـــــل :



المعطيات: ق(ب أ جـ) = ٣٠°، أ ب = ١٨ سـم، $\overline{م ب}$ ⊥ المستوى أ ب جـ، ب م = ٩ سـم، $\overline{ب هـ}$ ⊥ $\overline{أ جـ}$.

المطلـــوب: أولاً: إثبات أن: $\overline{م هـ}$ ⊥ $\overline{أ جـ}$.

ثانيًا: إيجاد قياس الزاوية م – $\overline{أ جـ}$ – ب.

البرهـــــان: ∵ مهـ مائل على المستوى أ ب جـ ، مسقطه هـب الواقع في المستوى ⊥ أجـ .

∴ المائل مهـ ⊥ أجـ أي أن مهـ ⊥ أجـ (المطلوب أولاً).

∵ هـم ⊥ أجـ ويقع في المستوى م أجـ.

، هـب ⊥ أجـ ويقع في المستوى ب أجـ.

∴ مهـب هي زاوية مستوية للزاوية الزوجية م ــ أجـ ــ ب

∴ ق الزاوية ∴ ق(م ــ أجـ ــ ب) = ق(مهـب)

في Δ أ ب هـ القائم الزاوية في هـ:

∵ أب = ١٨ســـم ، ق(أ) = ٣٠°

∴ ب هـ = ب جـا ٣٠° ١٨ × $\frac{١}{٢}$ = ٩ســـم

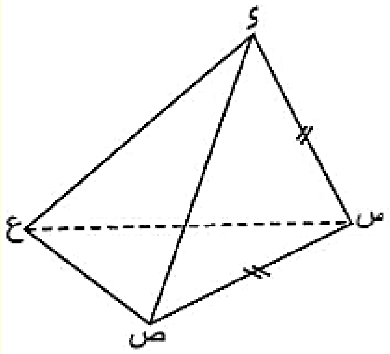
في Δ م ب هـ القائم الزاوية في ب (لأن م ب ⊥ المستوى أ ب جـ):

∵ م ب = ب هـ = ٩ ســـم

∴ ق(م هـ ب) = ٤٥°

∴ ق الزاوية (م ــ أجـ ــ ب) = ٤٥° (المطلوب ثانياً)

مثـــــال : س ص ع مثلث قائم الزاوية في ص ، س ء ⊥ مستوى المثلث س ص ع ،رسم ءص ، ءع فإذا كان س ء = س ص = ٢ ص ع ، فأوجــد قيــاس الزاويــة الزوجيــة (س ــ ص ع ــ ء)، ثـم أثبـت أن ٢ ء ع = ٣ ء س .



المعطيات: س ء ⊥ المستوى س ص ع ، س ء = س ص = ٢ ص ع .

المطلوب: أولاً: إيجاد قياس الزاوية الزوجية (س ــ ص ع ــ ء).

ثانيًا: إثبات أن: ٢ ء ع = ٣ ء س

مثـــــال : دائرة مركزها م نصف قطرها ١٠سم ، رسم الوتر أ ب طوله ١٢سم ، أقـيم م ن ⊥ مستوى الدائرة وكان ق<(م ، أ ب ، ن) = ٦٠° ، جـ منتصف أ ب ، أوجد طول ن م .

الحـــــل : ∵ جـ منتصف الوتر أ ب ∴ م جـ ⊥ أ ب

∴ عمود ن م ← مائل ن جـ ← مسقط م جـ

∵ م جـ $\perp$ أ ب   ∴ ن جـ $\perp$ أ ب

∴ م جـ ، ن جـ كل منهم في مستوى ،

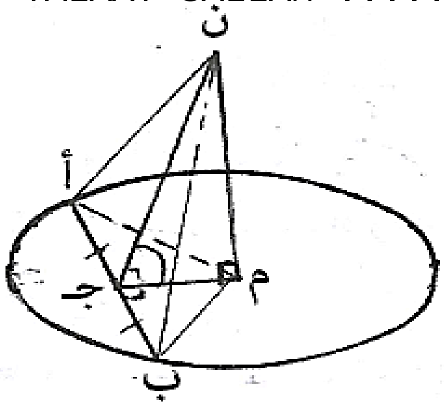
أعمدة على خط التقاطع أ ب

∴ م جـ، ن جـ يحصران الزاوية الزوجية = ٦٠°

∴ م جـ = $\sqrt{١٠^{٢} + ٦^{٢}}$ = ٨

∴ في △ ن م جـ : علم المجاور م جـ ، يريد المقابل ن م

∴ ظا ٦٠ = $\frac{\text{ن م}}{٨}$ ∴ ن م = ٨ $\sqrt{٣}$



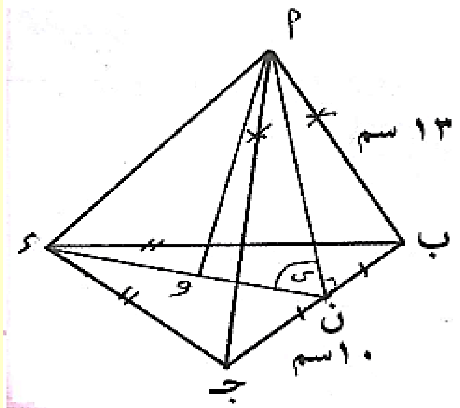
مثـــــال : في الشكل :

أ ب جـ د هرم ثلاثي فيه د ب = د جـ

، أ ب = أ جـ = ١٣ سم ، ب جـ = ١٠سم

، ق < (أ ، $\overleftrightarrow{\text{ب جـ}}$ ، د) = ٦٠°

، ن منتصف ب جـ أوجد طول أ و (ارتفاع الهرم) .



الحـــــل :

△ أ ب جـ فيه ن منتصف ب جـ

∴ أ ن $\perp$ ب جـ . بالمثل △ د ب جـ فيه :

ن منتصف ب جـ   ∴ د ن $\perp$ ب جـ

∴ أ ن ، د ن يحصران الزوجية (ي)

∴ ي = ٦٠°

، △ أ ب ن قائم في ن ، أ ب = ١٣

، ن ب = ٥   ∴ أ ن = $\sqrt{١٣^{٢} + ٥^{٢}}$ = ١٢

∴ △ أ ن و : علم الوتر ، يريد المقابل أ و .

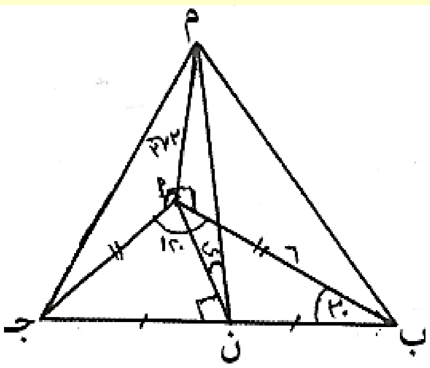
∴ جا ٦٠ = $\frac{\text{أ و}}{١٢}$ ∴ أ و = ١٢ x $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ = ٦ $\sqrt{٣}$

مثـــــال: △ أ ب جـ فيه ق (أ) = ١٢٠° ، أ ب = أ جـ = ٦سم ،

رســـم م أ $\perp$ مســـتوى المثلث ، م أ = ٣ $\sqrt{٣}$ فإذا كان ن منتصف ب جـ

① أوجد ق < (م ، $\overleftrightarrow{\text{ب جـ}}$ ، أ)

② أثبت أن المستوى ب م جـ $\perp$ المستوى م ن أ .



الحـــــل :

(١) ∵ ن منتصف $\overline{\text{ب جـ}}$ ، أ ب = أ جـ

∴ $\overline{\text{أ ن}} \perp \overline{\text{ب جـ}}$

∴ عمود ⇐ مائل ⇐ مسقط

$\overline{\text{م أ}}$ ⇐ $\overline{\text{م ن}}$ ⇐ $\overline{\text{أ ن}}$

∵ $\overline{\text{أ ن}} \perp \overline{\text{ب جـ}}$ ∴ $\overline{\text{م ن}} \perp \overline{\text{ب جـ}}$

∴ $\overline{\text{م ن}}$ ، $\overline{\text{أ ن}}$ يحصران الزوجية (ي)

في Δ أ ب ن : وتر = ٦ ، مطلوب مقابل أ ن

∴ جا ٣٠ = $\frac{\text{أ ن}}{٦}$ ∴ أ ن = ٣

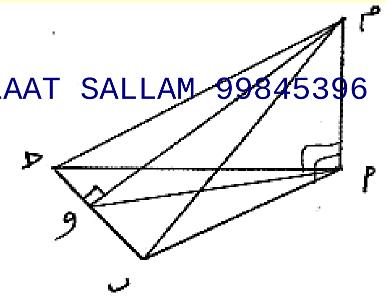
∴ في Δ أ ن م : علم المقابل ، المجاور (٣)

∴ ظا ي = $\frac{٣\sqrt{٣}}{٣}$ = $\sqrt{٣}$ ∴ ي = ٦٠°

(٢) ∵ $\overline{\text{ب جـ}} \perp \overline{\text{أ ن}}$ ، $\overline{\text{م ن}}$ ∴ $\overline{\text{ب جـ}} \perp$ المستوى م ن أ

، ∵ المستوى م ب جـ يمر بالمستقيم $\overline{\text{ب جـ}}$

∴ المستوى م ب جـ ⊥ المستوى م ن أ .



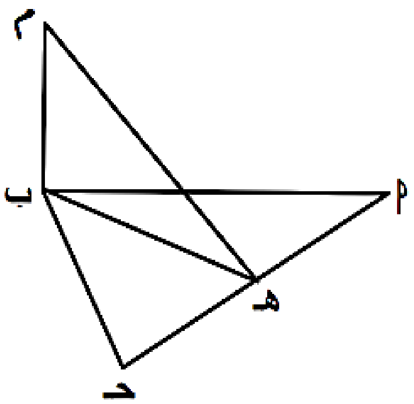
تدريب : م أ ب جـ هرم ثلاثي فيه $\overline{\text{م أ}} \perp \overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{م أ}} \perp \overline{\text{أ جـ}}$ ، $\overline{\text{م و}} \perp \overline{\text{ب جـ}}$

(١) أثبت أن : $\overline{\text{ب جـ}} \perp$ المستوى م و أ .

(٢) عين مسقط $\overline{\text{م ب}}$ على المستوى م و أ .

تدريب : في الشكل المقابل : Δ ﻫ ب حـ فيه ق (∠ ب ﻫ حـ) = ٣٠° ، $\overline{\text{ب م}} \perp$ المستوى ﻫ ب حـ ، $\overline{\text{ب هـ}} \perp \overleftrightarrow{\text{ﻫ حـ}}$ ، ﻫ ب = ١٠ سم ، ب م = ٥ سم أوجد قياس (∠ م – $\overleftrightarrow{\text{ﻫ حـ}}$ – ب)

الحـــــل :



∵ $\overline{\text{ب م}} \perp$ المستوى ﻫ ب حـ

∴ $\overline{\text{م هـ}}$ مائل على المستوى .... ، مسقطه هو ....

، ∵ $\overline{\text{ب هـ}} \perp \overleftrightarrow{\text{ﻫ حـ}}$

∴ .... ⊥ $\overleftrightarrow{\text{ﻫ حـ}}$

، ∵ م ∈ المستوى .... ، ب ∈ المستوى ....

∴ ∠ .... هى زاوية مستوية للزاوية الزوجية (∠ م – $\overleftrightarrow{\text{ﻫ حـ}}$ – ب)

، ∵ فى ∆ أ ب حـ :

ق (∠ ب أ حـ) = ٣٠° ، ق (∠ أ هـ ب) = ...

∴ ب هـ = ... × حا ٣٠ = ١٠ × .... = ... سم

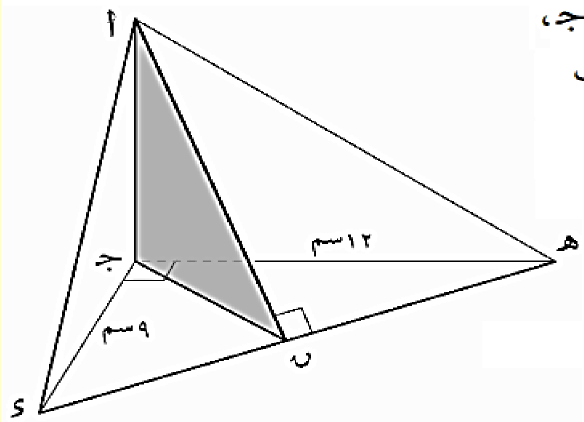
، ∵ فى ∆ م ب هـ :

ق (∠ م ب هـ) = ...° ، م ب = ب هـ = ... سم

∴ ق (∠ م هـ ب) = ...°

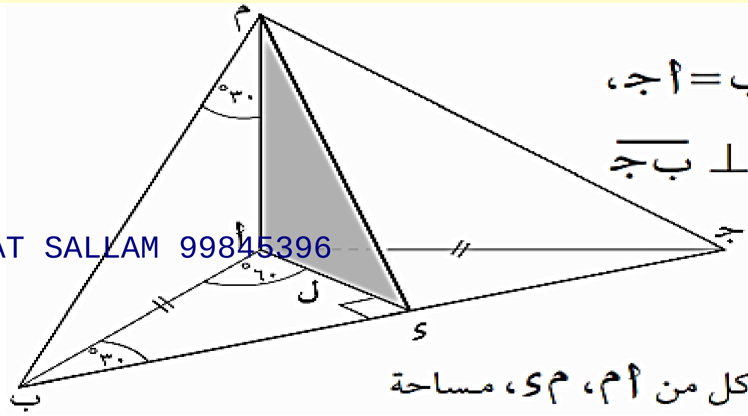
∴ ق (∠ م – أ حـ ↔ – ب) = ...°

تدريب : في الشكل المقابل: جـ ء هـ مثلث قائم الزاوية عند جـ، رُسم $\overline{أجـ}$ ⊥ المستوى جـ ء هـ، $\overline{أء}$ ، $\overline{أهـ}$ ، وكانت مساحة سطح ∆ أ ء هـ = ١٥٠ سم^٢ ، جـ ء = ٩سم ، جـ هـ = ١٢سم، أوجد طول $\overline{أهـ}$.



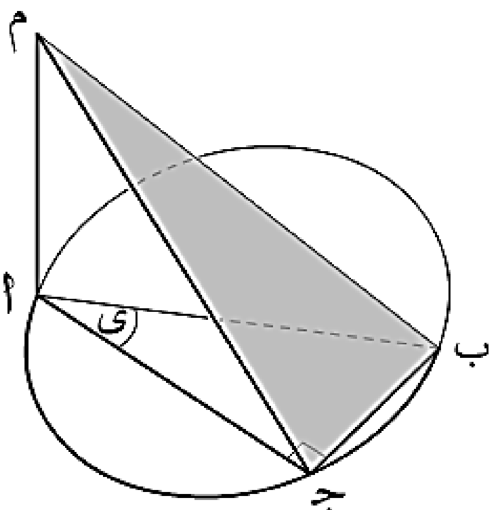
تدريب :

في الشكل المقابل: أ ب جـ مثلث فيه أ ب = أ جـ، ق(ب أ̂ جـ) = ١٢٠° ، رُسم $\overline{أء}$ ⊥ $\overline{ب جـ}$ يقطعه في ء، حيث أء = ل، رُسم $\overline{أم}$ ⊥ المستوى أ ب جـ، بحيث ق(أ م̂ ب) = ٣٠° ، أوجد بدلالة ل كل من أم، م ء، مساحة سطح ∆ م ب جـ.



تدريب :

$\overline{أب}$ قطر في دائرة طول نصف قطرها نق، رُسم $\overline{أم}$ ⊥ مستوى الدائرة حيث أم = نق، فإذا كان ق[∠(م – $\overleftrightarrow{ب جـ}$ – أ)] = ٤٥° ، فاحسب ق[∠(ب – $\overleftrightarrow{أم}$ – جـ)] هـ.



المستويات المتعامدة:

يُقال لمستويين انهما متعامدين ، إذا نشأ عن تقاطعهما أربع زوايا زوجية قوائم .

- لإثبات تعامد مستويين ، يكفي إثبات وجود زاوية زوجية عند تقاطعهما قائمة .

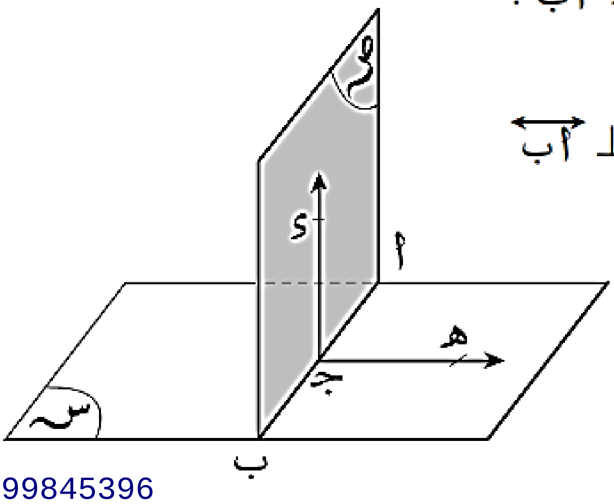
نظـــرية (٥) :

«إذا كان مستقيم عموديًّا على مستوى، فكل مستوى يحوي هذا المستقيم يكون عموديًّا على ذلك المستوى».

المعطيات: $\overleftrightarrow{\text{جـ د}}$ ⊥ المستوى س عند جـ، $\overleftrightarrow{\text{جـ د}}$ ⊂ ص، ص ∩ س = $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$.

المطلوب: أثبت أن: المستوى ص ⊥ المستوى س.

العمــل: نرسم في المستوى س: $\overleftrightarrow{\text{جـ هـ}}$ ⊥ $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$.



البرهـان: ∵ $\overleftrightarrow{\text{جـ د}}$ ⊥ المستوى س

∴ $\overleftrightarrow{\text{جـ د}}$ ⊥ $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ ∵ $\overleftrightarrow{\text{جـ هـ}}$ ⊥ $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$

∴ ^ هي زاوية مستوية

للزاوية الزوجية :

∠(س – $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ – ص)

∵ $\overleftrightarrow{\text{جـ د}}$ ⊥ س

∴ $\overleftrightarrow{\text{جـ د}}$ ⊥ ∴ ^ قائمة

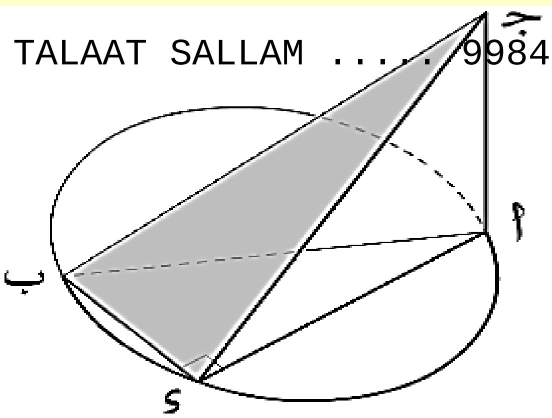
∴ ∠(س – $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ – ص) قائمة

نظرية (٦): { بدون برهان }

«إذا تعامد مستويان ورُسم في أحدهما مستقيمًا عموديًّا على خط تقاطعهما، كان هذا المستقيم عموديًّا على المستوى الآخر».

حقيقة:

«إذا كان كل من مستويين متقاطعين عموديًّا على مستوى ثالث، كان خط تقاطع هذين المستويين عموديًا على المستوى الثالث».



مثـــال :

$\overline{أب}$ قطر في دائرة ، $\overline{أجـ}$ ⊥ مستوى الدائرة، ء أي نقطة على الدائرة. أثبت أن المستويين أ جـ ء ، ب ء جـ متعامدان.

الحـــل :

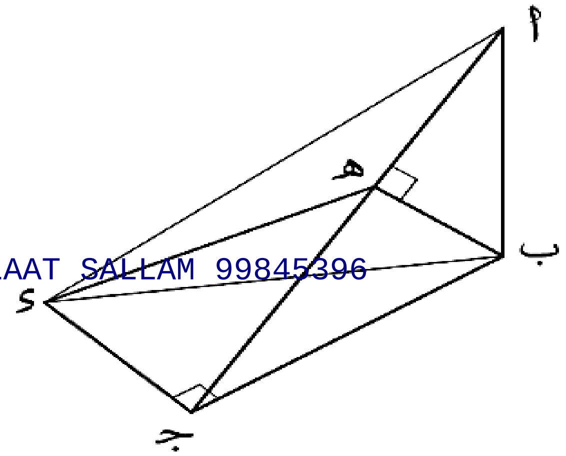
∵ $\overline{جـ أ}$ ⊥ مستوى الدائرة ∴ المستوى أ جـ ء ⊥ مستوى الدائرة .... نظرية (٥)

∵ المستوى أ جـ ء ∩ مستوى الدائرة = $\overleftrightarrow{أ ء}$ ، $\overline{ب ء}$ ⊥ $\overleftrightarrow{أ ء}$

∴ $\overline{ب ء}$ ⊥ المستوى أ جـ ء .... نظرية (٦)

∴ المستويان أ جـ ء ، ب ء جـ متعامدان .... نظرية (٥)

تدريب : أ ب جـ ء هرم ثلاثي فيه $\overline{أب}$ ⊥ المستوى ب جـ ء ، فإذا كان المثلث ب جـ ء قائم الزاوية عند جـ ، فأثبت أن:



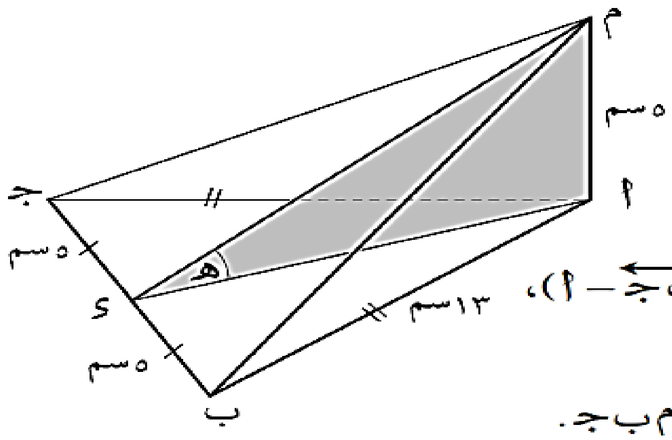
أولاً: $\overleftrightarrow{ء جـ}$ ⊥ المستوى أ ب جـ.

ثانيًا: المستوى أ جـ ء ⊥ المستوى أ ب جـ

ثالثًا: إذا رُسم $\overline{ب هـ}$ ⊥ $\overline{أ جـ}$ ، أثبت أن: $\overline{ب هـ}$ ⊥ $\overline{هـ ء}$.

تدريب :

م أ ب جـ هرم ثلاثي فيه $\overline{م أ}$ ⊥ المستوى أ ب جـ ، أ م = ٥سم ، أ ب = أ جـ = ١٣سم ، ب جـ = ١٠سم ، ء منتصف $\overline{ب جـ}$.



أولاً: احسب طول $\overline{أ ء}$ ، وأثبت أن: $\overline{م ء}$ ⊥ $\overline{ب جـ}$.

ثانيًا: احسب طول $\overline{م ء}$ ، واستنتج زاوية مستوية للزاوية الزوجية ∠ (م – $\overleftrightarrow{ب جـ}$ – أ)،

وإذا كان قياسها هـ أوجد جتاهـ .

ثالثًا: أثبت أن المستوى م أ ء ⊥ المستوى م ب جـ .

MR : TALAAT SALLAM ....: 99845396

تمارين على الاحداثيات فى الفراغ والزاوية الزوجية

1- أيا من العبارات التالية صحيحة وايها خطأ :

١ – إذا توازي مستويان فإن كل مستقيم في المستوى الأول يوازي المستوى الآخر .

٢ – إذا تعامد مستويان فإن كل مستقيم في المستوى الأول عمودي على الآخر .

٣ – المستقيم يوازي المستوى إذا كان يوازي مستقيم في المستوى .

٤ – المستقيم يعامد المستوى إذا كان عمودي على مستقيم في المستوى .

٥ – إذا كان المستقيم يوازي المستوى فإنه يوازي أي مستقيم في المستوى .

٦ – إذ كان المستقيم عمودي على المستوى فإنه يكون عمودي على أي مستقيم في المستوى.

٧ – المستقيمان الموازيان لمستقيم في الفضاء أو المستوى متوازيان .

٨ – المستقمان الموازيان لمستوى في الفضاء متوازيان .

٩ – المستقيمان العموديان على مستوى متوازيان .

١٠ – المستقيمان العموديان على مستقيم في الفضاء متوازيان .

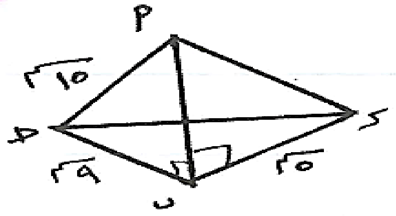
١١ – المستقيمان العموديان على مستقيم في المستوى متوازيان .

١٢ – المستويان العموديان على مستقيم متوازيان .

١٣ – المستوان العموديان على مستوى متوازيان .

MR:TALAAT SALLAM 99845396

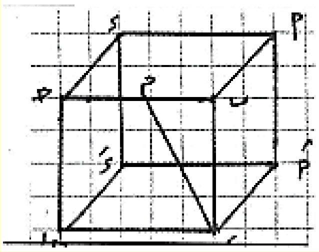
2- أختر الاجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

م	الســـــؤال	الاجابة
-1	إذا كان المستقيم $\overleftrightarrow{ل}$ مائل على المستوى س ، المستقيم ل يوازي المســـتوى ص فإن المستويان س ، ص: (أ) متوازيان (ب) يتقاطعان (ج) يتطابقان (د) يتماسان	
-2	في الشكل : هرم ثلاثي : $\overline{أب}$ ⊥ المستوى ب جـ د ، أ جـ = ١٥سم ، ب جـ = ٩ سم ، ب د = ٥سم ∴ طول $\overline{أد}$ = ...  (أ) ١٣ (ب) ١٢ (ج) ١١ (د) ٩	

-3 أي العبارات الآتية صحيحة :

أ) يتقاطع المستقيمان المتخالفان في نقطة .
ب) أي ثلاث نقط تعين مستوى واحد .
جـ) المستقيمان العموديان على مستقيم متوازيان .
د) كل ما سبق خطأ

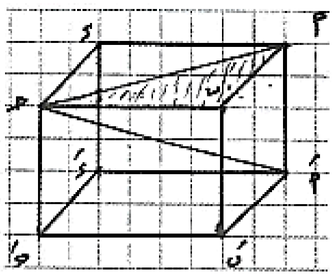
-4 $\overline{\text{د جـ}}$ ، $\overline{\text{ب}'\text{م}}$:



أ) يتقاطعان
ب) متوازيان
جـ) متعامدان
د) كل منهم يعامد ب جـ

-5 الشكل أ ب جـ د أ' ب' جـ' د' متوازي مستطيلات

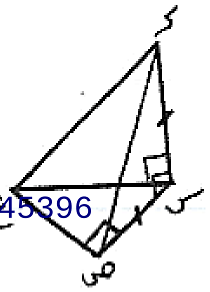
فإن مسقط $\overline{\text{أ}'\text{جـ}}$ على المستوى أ ب جـ هو :



أ) $\overline{\text{أ ب}}$
ب) $\overline{\text{أ جـ}}$
جـ) $\overline{\text{أ د}}$
د) $\overline{\text{د جـ}}$

-6 في الشكل الموضح : Δ س ص ع قائم في ص

$\overline{\text{د س}}$ ⊥ مستوى المثلث، د س = س ص أي العبارات غير صحيحة:



أ) $\overline{\text{د ص}}$ مائل على المستوى س ص ع ، مسقطه $\overline{\text{ص س}}$
ب) $\overline{\text{س ص}}$ ⊥ $\overline{\text{ص ع}}$ فيكون المائل د ص ⊥ $\overline{\text{ص ع}}$
جـ) الزاوية الزوجية بين المستويان د ع ص ، س ص ع قياسها ٤٥°
د) $\overline{\text{د ع}}$ مائل مسقطه $\overline{\text{ع ص}}$

-7 مظلة للسيارة مستطيلة الشكل أطوالها ٨ ، ٤ متر مائلة عل الجدار بزاوية فإن

مسقطها على الأرض ممكن يكون :

أ) مستطيل مساحته ٣٢ م^{٢}
ب) مستقيم
جـ) مستطيل مساحته ٢٩ م^{٢}
د) مثلث

-8 مربع طول ضلعه ٥سم عمودي على المستوى سـ فإن مسقطه على سـ :

أ) مربع مساحته ٢٥سم^{٢}
ب) قطعة مستقيمة طولها ٥ سم
جـ) نقطة
د) مثلث أطواله ٥ ، ٥ ، ٥$\sqrt{٢}$

-9 قطعة مستقيمة تميل على المستوى س ، طولها ٦سم ممكن يكون طول مسقطها على المستوى س يساوي :

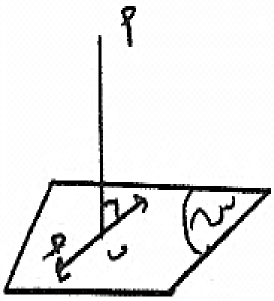
Ⓐ ٨سم　Ⓑ ٧سم　Ⓒ ٦سم　Ⓓ ٤سم

-10 الزاوية الناشئة من تقاطع الزاوية الزوجية مع أي مستوى عمودي على حافتها :

Ⓐ تكون قائمة　Ⓒ هي زاوية ميل الحافة على المستوى القاطع .

Ⓑ تكون دائماً حادة　Ⓓ تسمى الزاوية المستوية للزاوية الزوجية .

-11 $\overline{\text{أ ب}}$ يقطع المستوى س في نقطة ب ، $\overleftrightarrow{\text{ب جـ}} \subset$ س فإذا كان $\overleftrightarrow{\text{أ ب}} \perp$ ب جـ فإن مسقط $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ على س يكون :



Ⓐ موازيا للمستقيم $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$　Ⓒ عمودياً على $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$

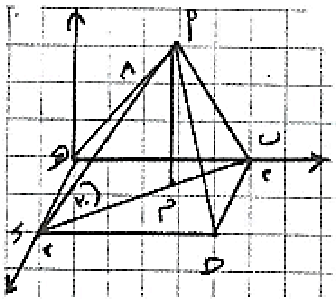
Ⓑ موازيا للمستقيم $\overline{\text{ب جـ}}$　Ⓓ عمودياً على $\overleftrightarrow{\text{ب جـ}}$

12 إحداثيات منتصف المسافة بين النقطتين: أ (٦ ، ٢ ، −٣)، ب (−٢ ، ٤ ، ٧) هي:

Ⓐ (٢ ، ٣ ، ٥)　Ⓑ (٤ ، ٣ ، ٢)

Ⓒ (٢ ، ٣ ، ٢)　Ⓓ (٤ ، −٣ ، −٥)

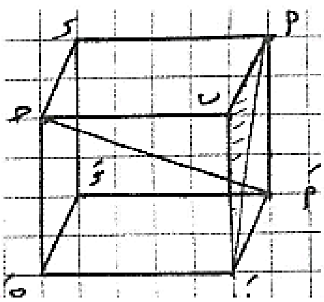
-13 في الشكل الموضح أ ب جـ د هـ هرم رباعي قائم إحداثيات الرأس أ هي :



Ⓐ (٢ ، ٢ ، ٤)　Ⓑ (٢ ، ٢ ، ٨)

Ⓒ (١ ، ١ ، ٤)　Ⓓ (١ ، ١ ، ٨)

-14 شكل متوازي المستطيلات فإن مسقط $\overline{\text{أ' جـ}}$ على المستوى أ ب ب' هو:



Ⓐ $\overline{\text{أ د}}$　Ⓑ $\overline{\text{أ' ب}}$

Ⓒ $\overline{\text{أ ب}}$　Ⓓ $\overline{\text{د جـ}}$

-15	إحداثيات منتصف $\overline{\text{أ ب}}$ حيث أ (٦ ، ٢ ، −٢) ، ب (−٢ ، ٤ ، ١٢) هي : أ (٤ ، ٦ ، ١٠) ب (٣ ، ١ ، −١) جـ (−١ ، ٢ ، ٦) د (٢ ، ٣ ، ٥)	
-16	في النظام الإحداثي ثلاثي الأبعاد أي نقطة تقع في المستوى ع س هي : أ (أ ، ب ، ٠) ب (أ ، ٠ ، جـ) جـ (٠ ، ب ، ٠) د (٠ ، ب ، جـ)	
-17	متوازي مستطيلات أبعاده : $\sqrt{5}$ ، ٢ ، ١ فإن طول قطره يساوي : أ ١٠ ب ٨ جـ $\sqrt{10}$ د $\sqrt{8}$	
-18	إذا كان أ ب = ٤سم ، $\overline{\text{أ ب}}$ // س فإن طول مسقط $\overline{\text{أ ب}}$ على س يساوي: أ ٠ ب ٤ جـ ٨ د ١٦	
-19	المسافة بين نقطة الأصل والنقطة (٠ ، ٤ ، −٣) تساوي : أ ١ ب ٣ جـ ٤ د ٥	
-20	طول مسقط قطعة طولها ١٠ سم على مستوى ، تصنع 45° مع مسقطها يساوي.. أ ١٠ ب ١٠$\sqrt{2}$ جـ ٥$\sqrt{2}$ د ٥	
-21	$\overline{\text{أ ب}}$ قطر في دائرة م ، أ = (−١ ، ٣ ، ٦) ، م = (٣ ، −٢ ، ٤) فإن إحداثيات ب تساوي : أ (٧ ، −٧ ، ٢) ب (٧ ، ٧ ، −٢) جـ (٢ ، ٧ ، −٧) د (−٧ ، ٢ ، ٧)	

-22 إذا كان المستوى س يعامد المستوى ص فأي العبارات الآتية صحيحة:

(أ) كل مستقيم في ص يعامد س .

(ب) كل مستقيم في ص يلاقي خط تقاطع س ، ص .

(ج) كل مستقيم في ص يعامد خط التقاطع .

(د) كل مستقيم في ص ، يعامد خط التقاطع يكون عمودي على س

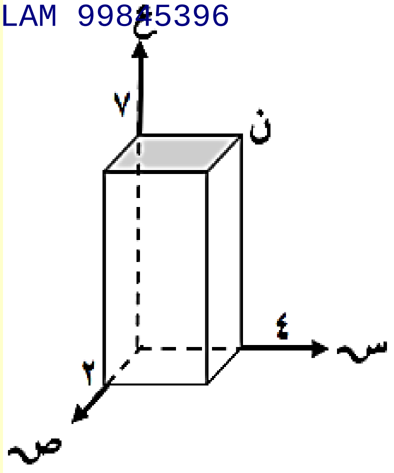
-23 متى يكون المستقيمان $\overleftrightarrow{\text{ل}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{م}}$ غير متقاطعان ، ولا يحويهما مستوى واحد ؟

أ) $\overleftrightarrow{\text{ل}} \not\parallel \overleftrightarrow{\text{م}}$ ب) $\overleftrightarrow{\text{ل}} \perp \overleftrightarrow{\text{م}}$ ج) $\overleftrightarrow{\text{ل}}$ ينطبق $\overleftrightarrow{\text{م}}$ د) $\overleftrightarrow{\text{ل}}$ يخالف $\overleftrightarrow{\text{م}}$

-24 كم مستقيماً يمكن أن يمر بثلاث نقاط على استقامة واحدة ؟

أ) صفر   ب) ١   ج) ٢   د) عدد لانهائي

-25 الشكل المقابل ، ما إحداثيات النقطة ن ؟

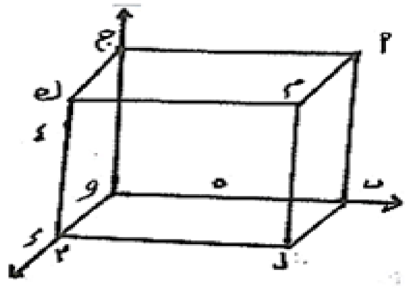


أ) (٤ ، ٢ ، ٧)   ب) (٤ ، ٠ ، ٧)

ج) (٤ ، ٧ ، ٢)   د) (٤، ٧ ، ٠)

ثانياً : الاســـــئلة المقالـــية :

١) الشكل يمثل شبه مكعب أبعاده : ٥سم ، ٣سم ، ٤سم **أوجد :**



١) مسقط $\overline{\text{أ ب}}$ على المستوى ب ل جـ و .

٢) مستويين متقاطعين ، فيما يتقاطعان .

٣) إحداثيات ل .

٤) زوجاً من المستقيمات المتخالفة ، المتعامدة .

٥) مستقيم عمودي على المستوى و د ك جـ .

---

٢) أ ب جـ مثلث فيه ق أ = ٣٠° ، أ ب = ١٠سم ، رسم من ب العمــــود $\overline{\text{ب د}}$ على مستوى المثلث بحيث ب د = ٥سم . أوجد قياس الزاويـــة الزوجيـــة بـــين المستويين : أ د جـ ، أ ب جـ .

---

٣) وضح أن النقاط التالية هي رؤوس مثلث قائم الزاوية أ (٢ ، ١ ، ٦) ، ب (٤ ، ٧ ، ٩) ، جـ (٨ ، ٥ ، −٦) ثم حدد رأس القائمة ، أوجد مساحة المثلث

---

٤) ل م ن مثلث متساوي الساقين فيه ق (م̂) ١٢٠° ، نصف $\overline{\text{ل ن}}$ في هـ ، رسم $\overline{\text{م د}}$

⊥ مستوى المثلث بحيث م د = $\frac{١}{٢}$ ل م . احسب قياس الزاوية الزوجية بين المستويين د ل ن ، ل م ن .

---

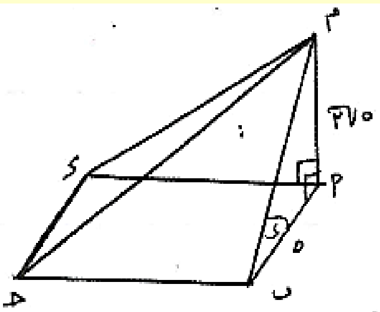
٥) مثلث د ب جـ فيه ، جـ ب= ١٨سم ، أقيم $\overline{\text{أ ب}}$ ⊥ المستوى ، رسم $\overline{\text{أ جـ}}$ ⊥ $\overline{\text{جـ د}}$ ، كان ب أ = ٦ $\sqrt{٣}$. أوجد قياس الزاوية بين المستويين أ جـ د ، ب جـ د .

(٣٠°)

---

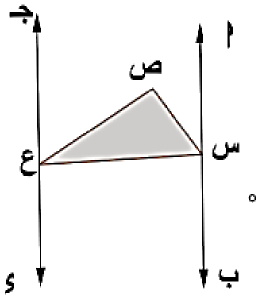
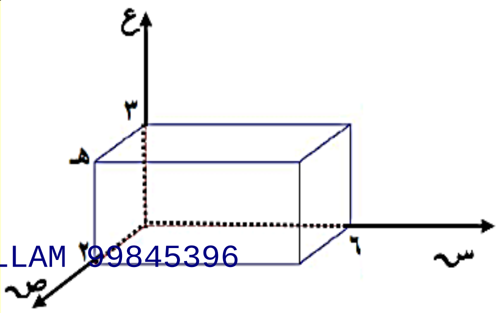
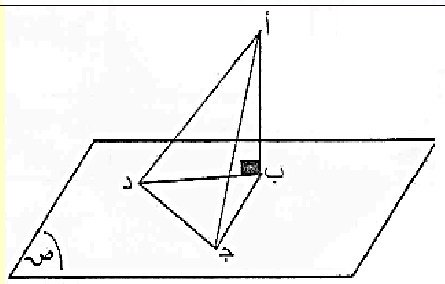
٧) م أ ب جـ د هرم رباعي قاعدته على شكل مربع طول ضـــلعه ٥ســـم إذا كـــان $\overline{\text{م أ}}$ ⊥ المستوى أ ب جـ د ، طول $\overline{\text{م أ}}$ ٥ $\sqrt{٣}$

أثبت أن : ق < (أ ، $\overline{\text{ب جـ}}$ ، م) = ٦٠°



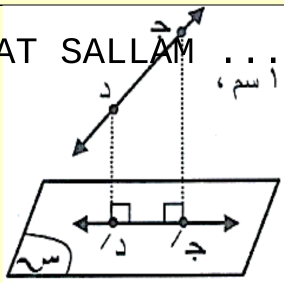
أسئلة الاختبارات على الإحداثيات في الفراغ والزاوية الزوجية

أولاً : الاســـــئلة المقالية :

م	الســــــــــــــــــــــــؤال	الإجابة
-1	احداثيات منتصف المسافة بين النقطتين ل (٣ ، -٢ ، -٧) ، م (٥ ، ٤ ، ٣) هي: أ) (٤ ، -١ ، ٢) ب) (٤ ، ١ ، -٢) جـ) (٤ ، ١ ، ٢) د) (٤ ، -١ ، -٢)	
-2	في الشكل المقابل ، اذا كان $\overleftrightarrow{أب} \parallel \overleftrightarrow{جء}$ ، $\overleftrightarrow{أب}$ ⊥ المستوى س ص ع ، فإن قياس (ص ع̂ جـ) تساوي: أ) ٣٠° ب) ٤٥° جـ) ٦٠° د) ٩٠° 	
-3	في الشكل المقابل ، احداثيات النقطة هـ هي : أ) (٠ ، ٠ ، ٣) ب) (٠ ، ٢ ، ٣) جـ) (٦ ، ٢ ، ٣) د) (٦ ، ٠ ، ٣) 	
-4	المسافة بين النقطتين أ(٦ ، ٢ ، -١) ، ب(١ ، -٤ ، ٧) تساوي : أ) √٩٣ ب) √٩٧ جـ) ٥√٥ د) ٥√١٣	
-5	المسافة بوحدة الطول بين النقطتين أ(–٢، ٥، ٣)، ب(–٢، ٣، ٥) تساوي: أ) صفر ب) ٢√٢ ج) ٢√٦ د) ٨	
-6	في الشكل المقابل، أياً مما يلي يمثل مسقط $\overline{أ ب}$ على المستوى ص؟ أ) $\overline{ب جـ}$ ب) $\overline{جـ د}$ ج) النقطة ب د) النقطة جـ 	

-7 في الشكل المقابل: $\overleftrightarrow{جـ د}$ يصنع زاوية قياسها ٦٠° مع المستوى س . إذا كان طول $\overline{جـ د}$ = ١٠ سم ، فإن طول مسقط $\overline{جـ د}$ على المستوى س يساوي بالسنتيمتر:

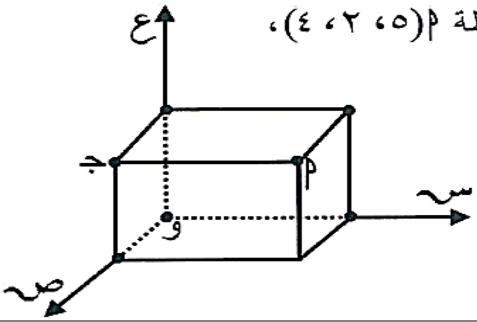
أ) ٥ ب) ٥ $\sqrt{٣}$ ج) ١٠ د) ١٠ $\sqrt{٣}$



-8 الشكل المقابل يمثل شبه مكعب. إذا علمت أن إحداثيات النقطة أ(٥، ٢، ٤)، فإن إحداثيات النقطة جـ هي:

أ) (٠، ٠، ٤) ب) (٠، ٢، ٠)

ج) (٠، ٢، ٤) د) (٥، ٠، ٤)

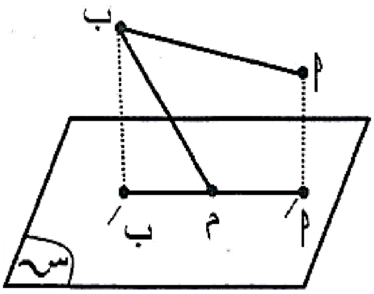


-9 في الشكل المقابل:

إذا كان $\overline{أَ بَ}$ مسقط $\overline{أ ب}$ على المستوى س ،

وكان ق($أ' \hat{م} ب$) = ١٢٥° ، فإن ق($ب' \hat{ب} م$) =

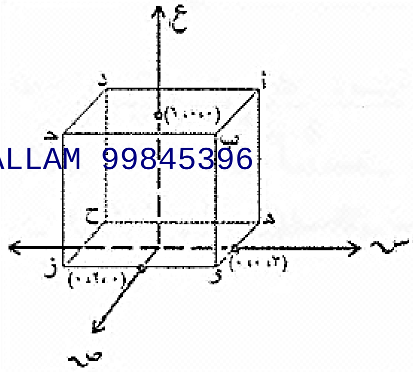
أ) ٦٠° ب) ٥٥° ج) ٤٠° د) ٣٥°



-10 الشكل المقابل مكعب طول حرفه ٦سم، ما إحداثيات النقطة ح؟

أ) (-٣ ، ٢ ، ٦) ب) (-٣، -٤، ٠)

ج) (-٣ ، -٢، ٠) د) (٣، -٢، ٦)



-11 إذا كانت النقطة جـ (٢س-٢ ، ١ ، -١) منتصف المسافة بين النقطتين

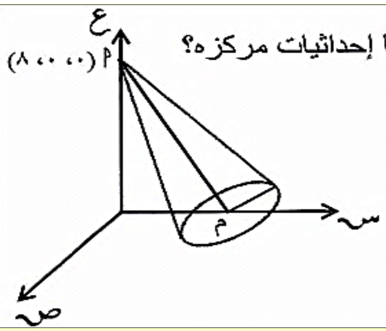
أ(س ، -٢ ، ١)، ب (٥، ٤، -٣) ، فما قيمة س ؟

أ) ٣ ب) ٤ جـ) ٧ د) ١٢

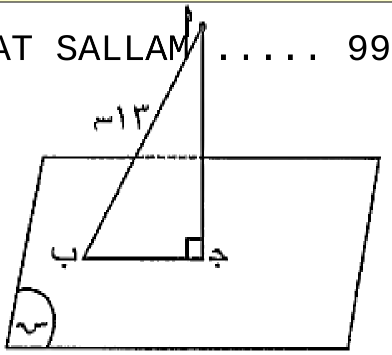
-12 الشكل المقابل مخروط دائري قائم مركزه النقطة م وارتفاعه ١٠سم، ما إحداثيات مركزه؟

أ) (٠،٠،٠) ب) (٠، ٠، ٨)

جـ) (٦، ٠، ٠) د) (٩، ٠، ٠)



-13 إذا كانت أ نقطة واقعة خارج المستوى س، رُسمت $\overline{أب}$ مائلة عليه وتقطعه في النقطة ب ، بحيث أب = ١٣سم ، فإذا كان بعد النقطة أ عن المستوى س يساوي ١٢سم. فما طول مسقط $\overline{أب}$ ؟

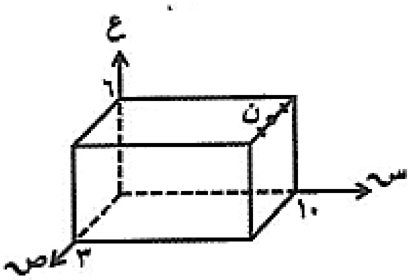


أ) ٢٥ ب) ١٤ ج) ٥ د) ١

-14 إذا كانت ن تنصف $\overline{ل م}$ ، وكان إحداثيات ل (٢، ٤، ٥)، م (٤، ٠، ٣). فما إحداثيات النقطة ن؟

أ) (-٢، ٤، ٢) ب) (٣، ٢، ٤) ج) (٦، ٤، ٨) د) (٢، -٤، -٢)

-15 ما إحداثيات النقطة ن في الشكل المقابل؟



أ) (١٠، ١,٥، ٦) ب) (١٠، ٣، ٦)

ج) (١٠، ٠، ٦) د) (١٠، ٦، ١,٥)

-16 $\overline{أب}$ قطر في دائرة مركزها م، إذا كانت إحداثيات أ (٧ ، -٤ ، ١) وإحداثيات م (٥، ٠، ٣) فما إحداثيات النقطة ب؟

أ) (٣، ٤، ٥) ب) (٣، ١، ٢) ج) (١، ٤، ٠) د) (١، ١، ٢)

-17 إذا كانت المسافة بين النقطتين ل(٣، ٢ص، ١)، م(٥، ص، -٣) يساوي $\sqrt{٢٠}$ وحدة طول، فما قيمة ص؟

أ) صفر ب) $\frac{١٠}{٣}$ ج) $٢\sqrt{٣}$ د) $\sqrt{١٤}$

-18 إذا كانت ن تنصف $\overline{ل م}$ ، وكان إحداثيات ل(٢، ٤، ٥)، م(٤، ٠، ٣). فما إحداثيات النقطة ن؟

أ) (-٢، ٤، ٢) ب) (٣، ٢، ٤) ج) (٦، ٤، ٨) د) (٢، -٤، -٢)

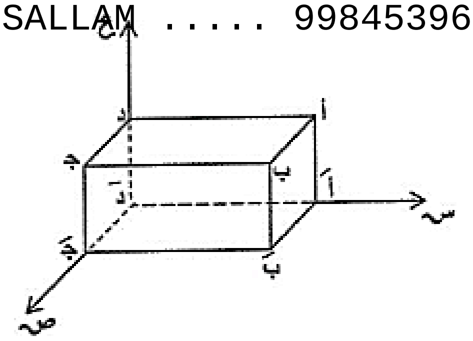
-19 ما إحداثيات نقطة منتصف القطعة المستقيمة التي تربط بين النقطتين س(١، -٣، ٥)، ص(-٧، ١، ٩)؟

أ) (٤، ٢، ٧) ب) (-٣، -١، ٧) ج) (٤، ٢، -٢) د) (-٣، -١، -٢)

-20 إذا كانت النقطة جـ (٢س - ٢ ، ١ ، -١) منتصف المسافة بين النقطتين أ (س، -٢، ١)، ب (٥، ٤، -٣)، فما قيمة س؟

أ) ٢ ب) ٤ ج) ٧ د) ١٢

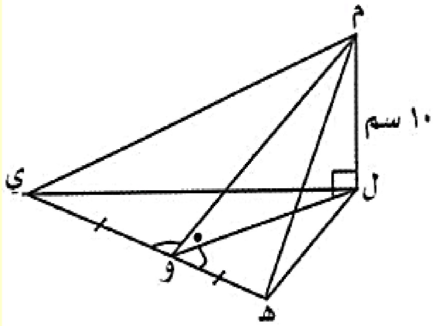
-21 في الشكل المقابل: إذا كان أ د = ٤ سم، د جـ = ٢سم، جـ جـَ = ٥ سم فما طول قطر شبه المكعب أ ب جـ د أَ بَ جـَ دَ بالسنتيمتر؟



أ) ٣ $\sqrt{٥}$ ب) $\sqrt{٧}$

جـ) ٩ د) ٤٥

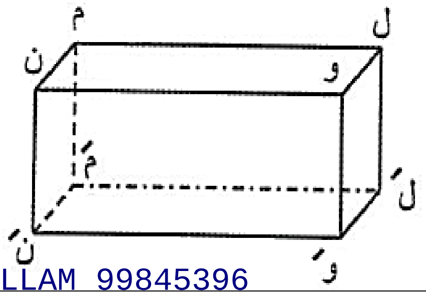
-22 في الشكل المقابل: إذا كان م و = ٢٠ سم، م ل = ١٠ سم، $\overline{\text{م ل}}$ ⊥ المستوى (ل هـ ي) فإن ق(م وَ ل) يساوي:



أ) ٣٠° ب) ٤٥°

جـ) ٦٠° د) ٩٠°

-23 الشكل المقابل يمثل متوازي مستطيلات، مسقط $\overline{\text{لَ نَ}}$ على المستوى ل و وَ هو:



أ) $\overline{\text{ل م}}$ ب) $\overline{\text{لَ وَ}}$

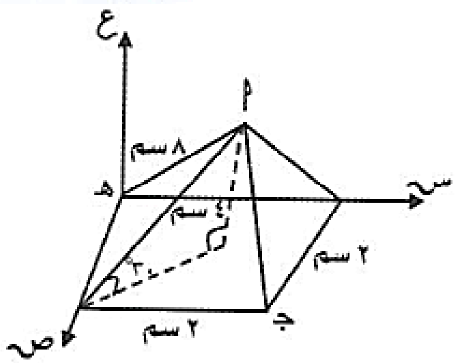
جـ) $\overline{\text{لَ و}}$ د) $\overline{\text{م ن}}$

-24 إذا كانت أ(٤ ، ٤ ، ٠) ، ب (٤ ، ٠ ، ٤) ، جـ (٠ ، ٤ ، ٤) فما نوع المثلث أ ب جـ؟

أ) متساوي الأضلاع ب) قائم الزاوية

جـ) منفرج الزاوية د) مختلف الأضلاع

-25 في الشكل المقابل أ ب جـ د هـ هرم منتظم قاعدته مربعة الشكل ما إحداثيات الرأس أ؟



أ) (٢ ، ٢ ، ٤) ب) (٢ ، ٢ ، ٨)

جـ) (١ ، ١ ، ٤) د) (١ ، ١ ، ٨)

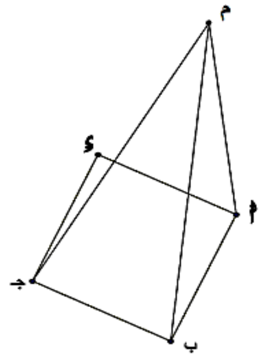
-26 في النظام الإحداثي ثلاثي الأبعاد، إحداثيات أي نقطة تقع في المستوى ع س هي:

أ) (أ، ب، ٠) ب) (أ، ٠، جـ) جـ) (٠، ب، ٠) د) (٠، ب، جـ)

MR : TALAAT SALLAM 99845396

ثانياً : الاســـــــئلة المقالية

١) أ) اذا كانت المسافة بين النقطتين م (-٢ ، ٦ ، ٢ع) ، ن (-١ ، ٣ ، ٠) يساوي $٥\sqrt{٢}$ ، فما قيمة ع؟



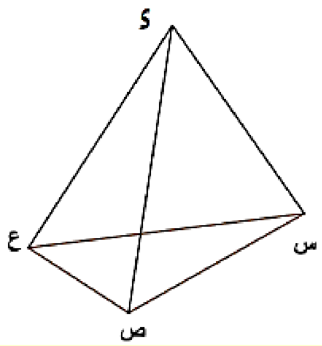
ب) في الشكل المقابل: أ ب جـ ء مربع طول ضلعه ل سم ،

رسمت $\overline{مأ}$ عمودية على مستوى المربع ، حيث م ب= $\sqrt{٢}$ ل سم،

أثبت أن قياس الزاوية الزوجية بين المستويين م ب جـ ، أ ب جـ ء

تساوي ٤٥°.

٢) أ) اوجد احداثيات منتصف المسافة بين النقطتين ل (٢ ، ١ ، -٥) ، هـ (-٨ ، ٣ ، ١٥)



ب) س ص ع مثلث قائم الزاوية في ص ، رسم من س العمود $\overline{س ء}$

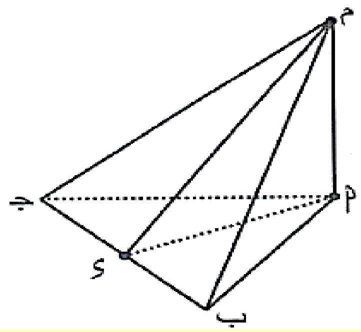
على مستوى المثلث س ص ع ، حيث س ص = $\sqrt{٣}$ ء س

اوجد قياس الزاوية الزوجية بين المستويين س ص ع ، ء ص ع

MR:TALAAT SALLAM 99845396

٣) أ) إذا كانت أ(١، ٢، ن) تُنصِّف $\overline{بجـ}$ ، حيث ب(م، ٣، -٤) ، جـ(٥، ك، ٢) ،

فأوجد قيم كلًا من: م ، ك ، ن.



ب) في الشكل المجاور: م.أ ب جـ هرم ثلاثي رأسه م ،

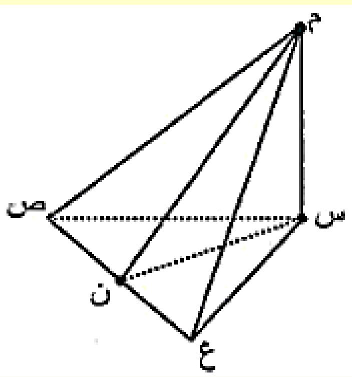
وقاعدته المثلث المتطابق الأضلاع أ ب جـ الذي طول

ضلعه ١٢ سم ، م ء = ١٢ $\sqrt{٣}$ سم ،

$\overline{بجـ}$ ⊥ المستوى م أ ء ، $\overline{مأ}$ ⊥ $\overline{أب}$ ، $\overline{مأ}$ ⊥ $\overline{أجـ}$.

أوجد قياس الزاوية الزوجية بين المستويين أ ب جـ ، م ب جـ.

٤) أ) في الشكل المقابل : س ص ع مثلث ، أسقط من النقطة م

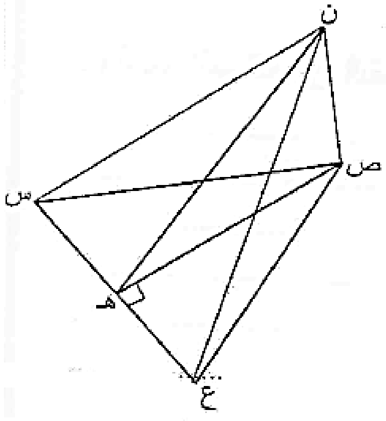


العمود $\overline{من}$ على $\overline{عص}$ ، ورُسِم من النقطة م العمود $\overline{مس}$

على مستوى المثلث س ص ع . إذا كان م ن = ٢× س ن ،

فأوجد قياس الزاوية الزوجية بين المستويين م ع ص ، س ع ص.

ب) إذا كانت المسافة بين النقطتين أ(ك ، ٣ ، ١) ، [illegible] تساوي ٩ [illegible]
قيم (ك) المُمكنة.



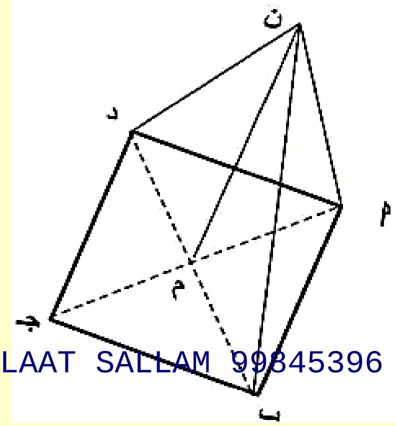
٥) أ) $\triangle$ س ص ع فيه: ق($\hat{س}$)= ٦٠°، س ص= ١٠ سم، $\overline{ص هـ} \perp \overline{س ع}$،

وكانت $\overline{ن ص} \perp$ المستوى س ص ع حيث ن ص = ٥ سم.

١- أوجد طول $\overline{ص هـ}$.

٢- أوجد قياس الزاوية الزوجية بين المستويين ص س ع، ن س ع.

ب) أوجد المسافة بين النقطتين أ (-٢، ٠، -٦) ، ب (١، ٠، -٢)



٦) أ) في الشكل المقابل:

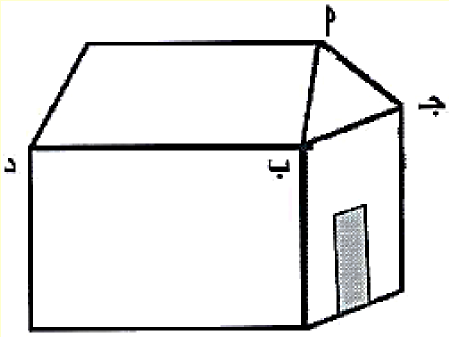
م نقطة تقاطع قطرا المربع أ ب جـ د ،

$\overline{أ ن} \perp$ مستوى المربع أ ب جـ د ،

أ ب = ١٢ سم، أ ن = ٦ $\sqrt{٢}$ سم

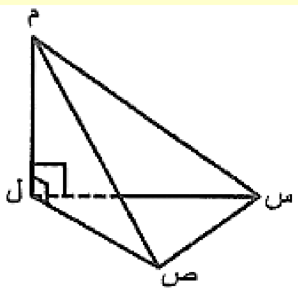
١) أثبت أن $\overline{ب د} \perp$ المستوى ن أ م

٢) أوجد قياس الزاوية الزوجية بين المستويين ن ب د ، أ ب د.



ب) الشكل المقابل يمثل منزلاً سقفه على شكل مستويين
متقاطعين بينهما زاوية قياسها ٦٠°.

إذا كان أ ب = ٦م ، ب د = ١٥م فأوجد أبعاد أرضية المنزل.



٧) أ) من الشكل المقابل:

م ل ص س هرم ثلاثي فيه ق($\hat{م ل س}$) = ق($\hat{م ل ص}$) = ٩٠°

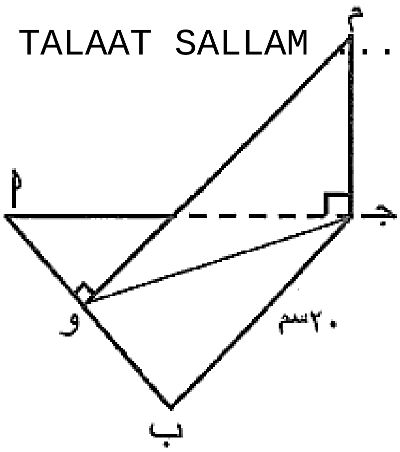
أثبت أن: $\overline{م ل}$ عمودية على المستوى س ص ل .

ب) أ ب جـ مثلث فيه جا(أ $\hat{ب}$ جـ) = $\frac{٤}{٥}$ ، جـ ب = ٢٠سم ،

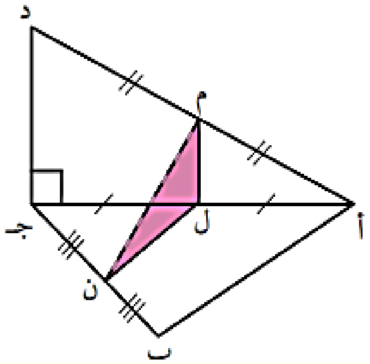
رسمت $\overline{م جـ}$ عمودية على مستوى المثلث أ ب جـ ،

ورسمت $\overline{م و}$ مائلة على المستوى أ ب جـ وعمودية على $\overline{أ ب}$

أوجد طول $\overline{جـ و}$.



٨) أ) أ ب جـ مثلث رسم $\overline{جـ د}$ عمودي على المستوى أ ب جـ ، ثم وصل $\overline{د أ}$ ، ونصف $\overline{أ د}$ ، $\overline{أ جـ}$ ، $\overline{ب جـ}$ في م ، ل ، ن على الترتيب. ثم وصل $\overline{م ن}$ فكان عمودياً على $\overline{ب جـ}$. أثبت أن الزاوية أ ب جـ قائمة.

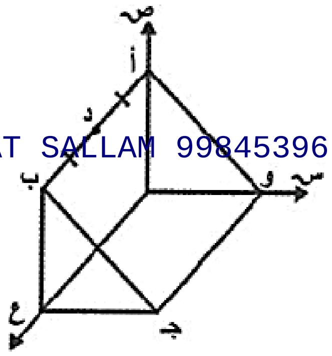


ب) في الشكل الذي أمامك أ (٠ ، ٠ ، ٣) ، ب (٠ ، ٤ ، ٣) ، جـ (٣ ، ٠ ، ٠) أوجد كلاً مما يأتي:

(أ) احداثيات النقطة و

(ب) احداثيات النقطة د

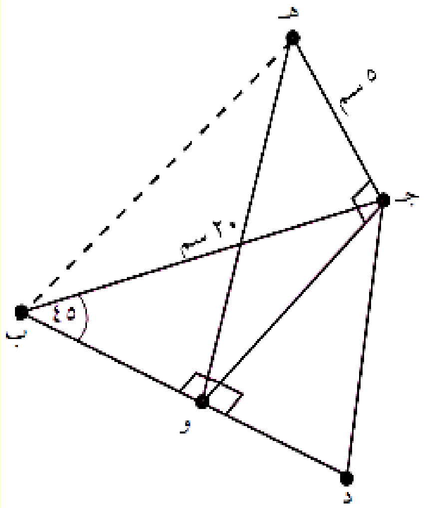
(ج) طول $\overline{ب جـ}$



٩) أ) $\overline{ب جـ}$ ، $\overline{ب د}$ قطعتان مستقيمتان، الزاوية بينهما ٤٥°، أنزل من جـ العمود $\overline{جـ و}$ على $\overline{ب د}$ ، فتكّون المثلث المتساوي الساقين ب و جـ ، ثم أقيم من جـ العمود $\overline{جـ هـ}$ على المستوى جـ ب د. أقيم من هـ العمود $\overline{هـ و}$ على $\overline{ب د}$.

بحيث كان طول $\overline{جـ هـ}$ ٥ سم ، وطول $\overline{جـ ب}$ ٢٠ سم.

أجد طول $\overline{هـ ب}$.

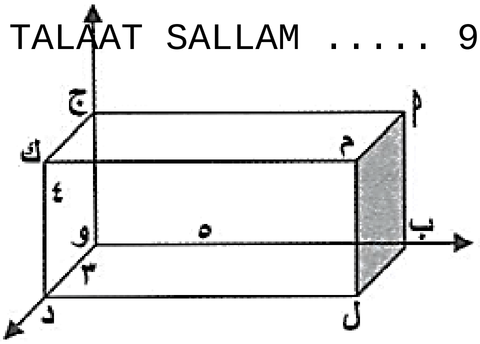


ب) الشكل المقابل يمثل شبه مكعب أبعاده ٥ سم، ٣ سم، ٤ سم، كما هو موضح بالرسم. أوجد:

(أ) مسقط $\overline{\text{أب}}$ على المستوى ب ل د و.

(ب) مستويين متقاطعين وفيما يتقاطعان.

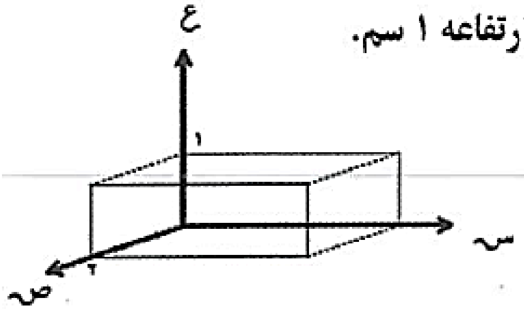
(ج) إحداثيات النقطة ل.



١٠) أ) متوازي مستطيلات طوله $\sqrt{٥}$ سم، وعرضه ٢ سم، وارتفاعه ١ سم.

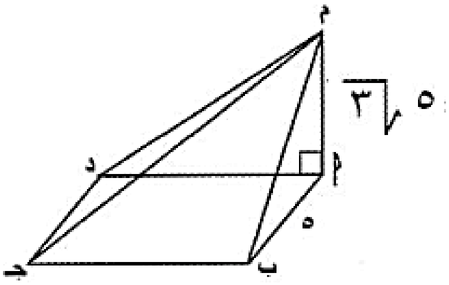
أ) أثبت أن طول قطره يساوي $\sqrt{١٠}$ سم.

ب) أوجد إحداثيات نقطة تلاقي أقطاره.



ب) م أ ب جـ د هرم رباعي، قاعدته على شكل مربع طول ضلعه ٥ سم، إذا كان $\overline{\text{م أ}}$ ⊥ على المستوى أ ب جـ د، م أ = ٥ $\sqrt{٣}$

أثبت أن ق ∡ (أ، $\overleftrightarrow{\text{ب جـ}}$، م) = ٦٠°

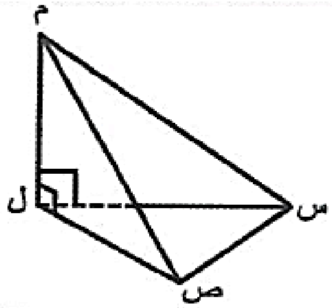


١١) أ) من الشكل المقابل:

م ل ص س هرم ثلاثي فيه

ق(م $\hat{\text{ل}}$ س) = ق(م $\hat{\text{ل}}$ ص) = ٩٠°

أثبت أن: $\overline{\text{م ل}}$ عمودية على المستوى س ص ل.



ب) دائرة مركزها م، طول نصف قطرها ١٣ سم. إذا رسمت $\overline{\text{أ م}}$ ⊥ مستوى الدائرة، حيث أ م = ١٢ سم، س ص = ١٠ سم. أجب عما يلي:

أ) أثبت أن $\overline{\text{م ب}}$ ⊥ $\overline{\text{س ص}}$.

ب) أوجد قياس الزاوية الزوجية بين المستويين أ س ص، م س ص.